# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE

## DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

**VOLUME XXXII.**

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

nel Bi. *esisteranno anche i loro reciproci*, compagni di quello che ho messo in vista nella Nota presente.

Osserverò anche quì che tutti questi fenomeni — gli assiali e i loro reciproci — la cui esistenza è oramai fuori questione, potrebbero, per quanto si è detto, fornire dati caratteristici di ogni metallo, qualora venissero ristudiati su grandi cristalli.

**Analisi infinitesimale.** — *Su una possibile estensione del metodo di Monge e Ampère alle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine che in* r, s, t *rappresentano una rigata d'ordine* n *avente una direttrice rettilinea.* Nota di MARIA MASCALCHI, presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

1. Useremo, nella nostra ricerca, i simboli di Monge. Siano $z = z(x, y)$ la funzione incognita, $p, q$ le sue derivate prime rispetto a $x, y$ e $r, s, t$ le derivate seconde rispetto alle stesse variabili. Monge e Ampère fecero la ricerca di un integrale $z = z(x, y)$ della equazione $Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$ a coefficienti funzioni di $z, x, y, p, q$ e si proposero di vedere quando esistevano due funzioni $V(x, y, z, p, q)$ che rimanessero costanti lungo uno dei due sistemi di caratteristiche tracciate sulla quadrica la cui equazione è data dalla precedente, considerando $r, s, t$ come coordinate correnti di punto. Le V si trovavano dall'integrazione di un particolare sistema jacobiano e, nel caso di esistenza delle due V, la ricerca si semplificava notevolmente.

Analogamente a quanto si propose Monge, partiremo dallo studio di una equazione che in $r, s, t$ coordinate correnti di punto rappresenti una rigata d'ordine $n$ a direttrice rettilinea avente il gruppo dei termini di grado più alto divisibile per $rt - s^2$. Per semplificare la ricerca non useremo la equazione della rigata, ma la rappresenteremo parametricamente come luogo di generatrici.

2. — Cominceremo lo studio dal caso più semplice, quello delle rigate del 3° ordine: esse hanno una direttrice semplice e una direttrice doppia in generale distinte. Le proprietà della rigata cubica a direttrici semplice e doppia coincidenti sono state studiate da Cayley: essa perciò dicesi rigata di Cayley. Sia dunque F una rigata cubica avente per direttrice doppia la retta $\varrho$ di equazioni

$$\begin{cases} r = h\mu + k \\ s = \mu \\ t = l\mu + m \\ u = 1 \end{cases}$$

Affinchè la superficie integrale contenga infinite linee caratteristiche, occorrerà che la equazione della rigata abbia il gruppo dei termini di grado più alto divisibile per $rt - s^2$, cioè l'intersezione della $F$ col piano $u = 0$ sarà la $c^2\gamma$, $rt - s^2 = 0$ e una retta residua $\sigma$. La $\varrho$ dovrà passare per uno dei punti $\gamma\sigma$. La $c^2\gamma$ parametricamente si può rappresentare con

$$\begin{cases} r = 1 \\ s = \lambda \\ t = \lambda^2 \\ u = 0 \end{cases}$$

e se $\lambda'$ è il valore di $\lambda$ che compete a $\varrho\gamma$, la $\varrho$ sarà

$$\begin{cases} r = \dfrac{\mu}{\lambda'} + k \\ s = \mu \\ t = \lambda'\mu + m \\ u = 1 \end{cases}$$

Pensando la corrispondenza determinata dalle generatrici fra i punti di $\gamma$ e di $\varrho$, si ha che essa è $(1, 2)$ e perciò la rappresenteremo con

$$a\lambda^2 + b\lambda + c - \mu(a_1\lambda^2 + b_1\lambda + c_1) = 0\,. \tag{1}$$

I punti corrispondenti sulla $\gamma$ al punto $\varrho\gamma$ sono i due punti $\sigma\gamma$, quindi sarà $a_1\lambda'^2 + b_1\lambda' + c_1 = 0$. La superficie è perciò luogo delle generatrici definite dalle equazioni

$$\begin{cases} r\lambda - s = \left(\dfrac{\mu}{\lambda'} + k\right)\lambda - \mu \\ s\lambda - t = \mu\lambda - (\lambda'\mu + m) \end{cases} \tag{2}$$

dove $\lambda$ e $\mu$ sono legate dalla (1).

Lungo ogni caratteristica deve essere

$$\begin{cases} r\,dx + s\,dy = dp \\ s\,dx + t\,dy = dq \end{cases}$$

Affinchè le (2) siano caratteristiche, occorre e basta che sia:

$$\frac{dx}{\lambda} = -dy = \frac{dp}{\left(\dfrac{\mu}{\lambda'} + k\right)\lambda - \mu} = \frac{dq}{\mu\lambda - (\lambda'\mu + m)}\,.$$

Cerchiamo due funzioni indipendenti $V = V(x, y, z, p, q)$ che rimangano costanti lungo tutte le caratteristiche. Dovrà essere $dV = 0$, ossia (indicando con $V_c$ la derivata rispetto a $c$)

$$(V_x + p V_z)\, dx + (V_y + q V_z)\, dy + V_p\, dp + V_q\, dq = 0$$

cioè

$$(3) \qquad (V_x + p V_z)\lambda - (V_y + q V_z) + \\ + V_p\left[\left(\frac{\mu}{\lambda'} + k\right)\lambda - \mu\right] + V_q\left[\mu\lambda - (\lambda'\mu + m)\right] = 0 ;$$

e ciò contemporaneamente alla (1). Se si pensano $\lambda, \mu$ coordinate correnti non omogenee di punto nel piano, si ha che la (1) è (per $a_1 \neq 0$) una $c^3$ e la (3) una $c^2$. La (3) deve essere verificata per ogni coppia di valori di $\lambda$ e $\mu$ che sodisfanno la (1), cioè la (1) deve essere parte della (3), e in tal caso, essendo la (1) di grado maggiore della (3), questa deve essere identicamente nulla rispetto a $\lambda$ e $\mu$, o la (1) deve ridursi alla (3) contata più volte. Quest'ultimo caso dà una corrispondenza degenere che noi tralasciamo di considerare. Annullando i coefficienti di $\lambda, \mu, \lambda\mu$ e il termine noto, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} V_p + \lambda' V_q = 0 \\ V_x + p V_z + k V_p = 0 \\ V_y + q V_z + m V_q = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} V_p + \lambda' V_q = 0 \\ V_x + p V_z - k\lambda' V_q = 0 \\ V_y + q V_z + m V_q = 0 . \end{cases}$$

Questo sistema ha forma jacobiana; quindi, se fosse completo, le parentesi di Poisson delle tre equazioni a due a due sarebbero nulle: ma la parentesi della prima e seconda, avendo il coefficiente di $V_z$ eguale a 1, non si può mai annullare, quindi il sistema non è completo. Avendosi 5 variabili $(x, y, z, p, q)$ e più che tre equazioni, non potranno esistere le due V indipendenti e il metodo non si potrà applicare.

Il caso di Cayley rientra in quello considerato, perchè in tal caso si ha la relazione $a\lambda'^2 + b\lambda' + c = 0$, che non ha influenza sul nostro ragionamento.

**3.** Passiamo ora al caso di una rigata generale d'ordine $n$ avente una retta direttrice $m - pla$. Il gruppo dei termini di $n - mo$ ordine sarà divisibile per $rt - s^2$. Il piano $u = 0$ sega cioè la $f^n$ (se questa è irriducibile) nella $c^2\gamma$ di equazione $rt - s^2 = 0$, di multiplicità $k$, e in $n - 2k$ rette residue ($m$ e $k$ potranno anche essere 1). La retta $\varrho$, direttrice $m - pla$, avrà le equazioni parametriche

$$\begin{cases} r = h\mu + k \\ s = \mu \\ t = l\mu + m \\ u = 1 \end{cases} \quad \text{e la } c^2\gamma \quad \begin{cases} r = 1 \\ s = \lambda \\ t = \lambda^2 \\ u = 0 \end{cases} .$$

Fra i punti della $\gamma$ e della $\varrho$ le generatrici determinano una corrispondenza $(k, m)$ che potremo rappresentare così

$$(1)\quad (a_{m,0}\,\mu^k + \cdots + a_{m,k})\,\lambda^m + \cdots \qquad \cdots + (a_{0,0}\,\mu^k + \cdots + a_{0,k})\,0\,.$$

Le generatrici della superficie saranno date da

$$(2)\quad \begin{cases} s\lambda - t = \mu\lambda - (l\mu + m) \\ r\lambda - s = (h\mu + k)\,\lambda - \mu \end{cases}$$

dove $\lambda$ e $\mu$ sono legate dalla (1).

Lungo ogni caratteristica deve essere:

$$\begin{cases} rdx + sdy = dp \\ sdx + tdy = dq \end{cases}$$

Affinchè le (2) siano caratteristiche, occorre e basta che sia [oltre alla (1)]

$$\frac{dx}{\lambda} = -\,dy = \frac{dp}{\lambda\,(h\mu + k) - \mu} = \frac{dq}{\lambda\,\mu - (l\mu + m)}\,.$$

Cerchiamo le funzioni $V(x, y, z, p, q)$ che rimangono costanti lungo tutte le caratteristiche, cioè tali che sia: $dV = 0$ donde

$$(V_x + pV_z)\,dx + (V_y + qV_z)\,dy + V_p\,dp + V_q\,dq = 0 \text{ cioè}$$

$$(3)\quad (V_x + pV_z)\,\lambda - (V_y + qV_z) + [\lambda\,(h\mu + k) - \mu]\,V_p + [\mu\lambda - (l\mu + m)]\,V_q = 0\,.$$

La (1) e la (3), se pensiamo $\lambda$ e $\mu$ coordinate non omogenee di punto nel piano, rappresentano rispettivamente una $c^{m+k}$ (nel caso generale di corrispondenza non degenere, cioè per $a_{m,0} \neq 0$) e una $c^2$. La (3) deve essere soddisfatta per ogni coppia di valori di $\lambda$ e $\mu$ che soddisfanno alla (1), cioè la (1) deve essere contenuta nella (3).

Distinguiamo 2 casi:

1°) $m + k > 2$. La (1) è di ordine superiore a (3), perciò la (3) dovrà essere identicamente nulla rispetto a $\lambda$ e $\mu$. (Se la (1) si riducesse alla (3) contata più volte la corrispondenza definita dalla (1) sarebbe degenere). Allora dovremo annullare i coefficienti di $\lambda$, $\mu$ e $\lambda\,\mu$ e il termine noto nella (3), cioè:

$$\begin{cases} V_x + p\,V_z + k\,V_p = 0 \\ V_y + q\,V_z + m\,V_q = 0 \\ h\,V_p + V_q = 0 \\ V_p + l\,Vq = 0 \end{cases}$$

Le ultime due danno $hl = 1$, sicchè la $\varrho$ taglia il piano $u = 0$ in un punto della $c^2$, $rt - s^2 = 0$.

Il sistema diviene pertanto:

$$\begin{cases} V_x + p\,V_z - kl\,V_q = 0 \\ V_y + q\,V_z + m\,V_q = 0 \\ V_p + l\,V_q = 0 \end{cases}$$

che coincide con quello trovato nel caso della rigata cubica. Questo sistema ha la forma jacobiana: sarebbe completo se le parentesi di Poisson delle due equazioni a due a due fossero nulle, cosa che non accade. Quindi le due V indipendenti non esistono e il metodo non si può applicare.

2°) $m + k = 2$. Con una semplice osservazione si vede che è $n \leq m + 2k$; quindi la $f^n$ è una rigata del 3° o del 2° ordine e, la cosa essendo già stata studiata. la questione è esaurita.

**4.** Il metodo usato si applica immediatamente al caso delle $f^2$ rigate. osservando che non è simmetrico rispetto ai 2 sistemi di generatrici e che perciò quel che si dice per l'un sistema, si può ripetere per l'altro. Pensiamo la $f^2$ come luogo di congiungenti di punti corrispondenti in una corrispondenza $(1, 1)$ fra la $c^2$, $rt - s^2 = 0$ nel piano $u = 0$, e una retta appoggiata alla $c^2$ di equazioni

$$\begin{cases} r = h\mu + k \\ s = \mu \\ t = \dfrac{\mu}{h} + m \\ u = 1 \end{cases}.$$

La corrispondenza, ricordando che la $c^2$ è data da

$$\begin{cases} r = 1 \\ s = \lambda \\ t = \lambda^2 \\ u = 0 \end{cases},$$

sia $(a\lambda + b)\,\mu + (a_1\,\lambda + b_1) = 0$. Dovendo il punto comune alla retta e a $\gamma$ essere unito, sarà $a\lambda' + b = 0$ donde $\lambda' = -\dfrac{b}{a}$ da cui ricavasi:

$$a + bh = 0\,.$$

La $f^2$ è luogo delle rette di equazioni

$$\begin{cases} s\lambda - t = \lambda\mu - \left(\dfrac{\mu}{h} + m\right) \\ r\lambda - s = (h\mu + k)\,\lambda - \mu \end{cases}.$$

dove $\lambda$ e $\mu$ sono legate da

$$b(1-h\lambda)\mu+(a_1\lambda+b_1)=0\,.$$

Ripetendo il ragionamento già fatto, otteniamo in ultima analisi due sole equazioni nelle $V_x, V_y, V_z, V_p, V_q$. Scrivendo la parentesi di Poisson di esse e imponendo che il sistema così ottenuto sia completo, si avranno delle relazioni fra i coefficienti, soddisfatte le quali, esisteranno effettivamente le due $V(x, y, z, p, q)$ fra loro indipendenti, che risolvono il problema.

**Astronomia.** — *Determinazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico di Roma sul Campidoglio.* Nota di GABRIELLA CONTI, presentata dal Corrispondente G. ARMELLINI.

La latitudine dell'Osservatorio della R. Università di Roma è stata determinata in diverse epoche e con metodi e strumenti differenti. Il prof. Calandrelli eseguì la determinazione col gran circolo verticale di Ertel; il prof. Respighi ripetè la misura con lo strumento zenitale e con lo stesso circolo verticale; i proff. Di Legge e Giacomelli si servirono anche del circolo meridiano. Recentemente il prof. Armellini ripetè questa determinazione, usando per la prima volta il metodo di Horrebow e Talcott e servendosi di un eccellente strumento dei passaggi di Bamberg a cannocchiale spezzato, dell'apertura di 88 mm. e della distanza focale di 95 cm. circa.

Le osservazioni di Respighi, Di Legge e Giacomelli furono fatte tutte *nella gran sala ellittica* dove è situato il circolo meridiano di Ertel; quelle dell'Armellini invece sono state fatte all'*aria aperta*, ed il risultato è inferiore di circa tre decimi di secondo alla media dei precedenti [1].

Poichè mi sono proposta da tempo lo studio della *rifrazione di camera* e della *rifrazione zenitale* — che costituisce uno dei problemi più importanti dell'Astronomia moderna, collegandosi direttamente alla ricerca del *termine di Kimura* della *costante di aberrazione*, e delle *parallassi stellari* — ho creduto utile di ripetere queste osservazioni con lo stesso metodo e nelle identiche condizioni dell'Armellini.

Ho scelto a tale scopo, tra le stelle fondamentali del Berliner Jahrbuch, otto coppie talcottiane e due stelle zenitali, riportate tutte nella seguente tabella, dove la prima colonna indica il numero d'ordine della coppia, la seconda il nome della stella, la terza la grandezza fotometrica, la quarta il numero di osservazioni e le due ultime rispettivamente l'ascenzione retta e la declinazione media all'epoca 1923,0.

(1) Occorre però osservare che la latitudine dello strumento dei passaggi di Bamberg è di circa 0″.08 inferiore a quella dello strumento meridiano. Inoltre bisognerebbe ridurre tutti i risultati allo stesso polo medio.