ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Questi dati farebbero credere che tutte e due le specie si infettassero molto più facilmente colle semilune che coi parassiti terzanari; ma i risultati diversi potrebbero essere invece semplicemente subordinati all'abbondanza delle semilune nei casi usati (parole di Wenyon stesso). Le prove devono essere perciò ripetute prima di venire a una conclusione.

4º) A mio parere, le belle e importanti osservazioni di Venyon urtano sempre contro lo scoglio da me incontrato e tutt'al più potrebbero aver valore in località, dove si fa una cura intensa della malaria estendentesi possibilmente a tutti gli infetti, mentre invece la scarsezza delle semilune a tempo opportuno e il succedersi della prevalenza delle estivo-autunnali alla prevalenza delle terzane si verificano anche in località, dove la malaria viene curata molto poco e si verificavano nei dintorni di Roma anche in un tempo in cui la chinizzazione era ancora molto deficiente.

L'invocare perciò l'azione del chinino per spiegare il succedersi delle forme, a me non sembra un buon argomento.

Matematica. — *Sulla costante isoperimetrica.* Nota del Corrispondente LEONIDA TONELLI.

1. Come è noto, l'Hadamard [1] ha esteso la regola isoperimetrica, data da Eulero per la risoluzione dei problemi isoperimetrici del Calcolo delle variazioni, al caso di curve minimanti che si trovino sulla frontiera del campo che si considera.

Siano due integrali curvilinei

$$I_C = \int_C F(x, y, x', y')\, ds \quad , \quad J_C = \int_C G(x, y, x', y')\, ds ,$$

ed una curva C_0, la quale appartenga tutta alla frontiera del campo A, che vogliamo considerare, ed abbia ovunque tangente e curvatura variabile in modo continuo. Indicata con K la classe di tutte le curve, continue e a tangente variabile in modo continuo, appartenenti al campo A ed aventi gli stessi punti terminali della C_0, detta $\overline{K}$ la sottoclasse di tutte le curve di K che soddisfano alla condizione

$$J_C = J_{C_0} ,$$

e supposto che, in $\overline{K}$, la curva C_0 dia il minimo dell'integrale I, se la variazione δJ di J, sulla C_0, in K, non è sempre dello stesso segno, l'Hadamard dimostra che *esiste un numero l tale che la variazione* $\delta(I + lJ)$

[1] Bull. Société Math. de France, t. 33 (1905), pag. 79; Annales de l'École Norm. Sup., t. 24 (1907), pp. 221-222; *Leçons sur le Calcul des Variations*, pp. 211-214.

di $I + lJ$, *sulla* C_0, *in* K, *sia sempre positiva o nulla.* Nelle sue « Leçons sur le Calcul des Variations », in nota a piè di pag. 213, Egli aggiunge anche: « *il est d'ailleurs évident que le nombre* l *est unique* ».

Ora a me non pare affatto evidente che il numero l sia *unico*.

Risulta facilmente che, se l non è unico, la totalità dei suoi valori è data da tutti i numeri di un determinato intervallo (l_1, l_2), ed io voglio mostrare qui, con un esempio assai semplice, che questo intervallo (l_1, l_2) *non si riduce sempre ad un solo punto.*

Sia il campo A costituito da tutti i punti del piano (x, y) non interni al cerchio di raggio 1, avente il centro nell'origine delle coordinate. Sulla circonferenza di questo cerchio, si considerino i punti P_1 e P_2, ambedue di ordinata positiva, e di ascisse rispettive $-1/2$ e $1/2$. Indicato con C_0 l'arco della circonferenza compreso fra P_1 e P_2, e di lunghezza minore di π, si consideri la classe K di tutte le curve del campo A, continue e a tangente variabile in modo continuo, che hanno il primo punto terminale in P_1 ed il secondo in P_2, ed in essa la sottoclasse $\overline{K}$ di tutte quelle che soddisfano alla uguaglianza

$$J_C = \int_C x^2 y' \, ds = J_{C_0}. \tag{1}$$

In $\overline{K}$, la C_0 dà il minimo per l'integrale

$$I_C = \int_C \sqrt{x'^2 + y'^2} \, ds \tag{2}$$

(come lo dà anche in K).

Osserviamo che la variazione δJ dell'integrale $\int_C G\, ds$, sulla C_0, in K, può scriversi nella forma

$$\delta J = -\int_{C_0} n(s)\, T[G]\, ds ,$$

dove è

$$T[G] \equiv G_{y'x} - G_{x'y} + G_1 (x'y'' - x''y'),$$

e dove $n(s) \equiv x'\delta y - y'\delta x$ rappresenta lo spostamento, normale alla C_0, del punto generico di questa curva, in conseguenza delle variazioni δx e δy, ed è perciò sempre $n(s) \geq 0$ (considerando come verso positivo, della normale alla C_0, quello che si volge all'interno del campo A). Dopo di ciò, abbiamo, sulla C_0, in K, per l'integrale (1),

$$\delta J = -2 \int_{C_0} n(s)\, x \, ds ;$$

e questa formula mostra che, per ogni $n(s)$ non sempre nulla sull'arco $\widehat{P_1Q}$ [Q essendo il punto della C_0 di ascissa nulla e ordinata positiva] e costantemente uguale allo zero sull'arco $\widehat{QP_2}$, è $\delta J > 0$, e, per ogni $n(s)$ nulla su tutto $\widehat{P_1Q}$ e non sempre zero su $\widehat{QP_2}$, è $\delta J < 0$.

La variazione di $I + lJ$, sulla C_0, in K, è data, analogamente, da

$$\delta(I + lJ) = -\int_{C_0} n(s)\, T[F + lG]\, ds,$$

ed affinchè questa variazione sia sempre positiva o nulla, occorre e basta che, su tutta la C_0, sia sempre

$$T[F + lG] \leq 0. \tag{3}$$

Per gli integrali (1) e (2), è

$$T[F + lG] \equiv 2lx + \frac{x' y'' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

e tenendo conto che, sulla C_0, la curvatura è costantemente uguale a -1, la (3) dà

$$2lx \leq 1.$$

Ma, sulla C_0, è sempre $-1/2 \leq x \leq 1/2$, onde, affinchè valga la (3), ossia affinchè la variazione di $I + lJ$ sulla C_0, in K, sia sempre ≥ 0, occorre e basta che sia $-1 \leq l \leq 1$. È dunque, nel caso attuale,

$$(l_1, l_2) \equiv (-1, 1).$$

2. Il teorema della conservazione della costante isoperimetrica, dato da Mayer relativamente agli archi delle curve minimanti interne al campo A, si estende anche a quegli archi che sono sulla frontiera del campo.

Siano $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, n archi della curva C_0, minimante nel problema isoperimetrico a punti terminali fissi, relativo agli integrali I e J; e tali archi siano tutti sulla frontiera del campo A, ed a tangente e curvatura variabili in modo continuo. Allora, *se la somma delle variazioni* (*libere, corrispondenti al campo* A) *di* J, *relative agli archi* β, *può assumere segni contrari, esiste un intervallo* (l_1, l_2), *tale che, per ogni* l *di esso, la variazione* (*libera, corrispondente al campo* A) *di* $I + lJ$ *sia, su ogni* β, *sempre* ≥ 0.

Supposto poi che $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ siano m archi della curva C_0, già indicata, tali che i loro punti, esclusi al più quelli terminali, siano interni al campo A, si ha anche che: *ammessa soddisfatta una almeno delle due condizioni seguenti:*

a) *su uno almeno degli archi α, la variazione (libera) di* J *non è sempre nulla;*

b) *la somma delle variazioni (libere, corrispondenti al campo* A) *di* J, *relative agli archi $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, può assumere segni contrari;*

esiste un intervallo (l_1, l_2), tale che, per ogni l di esso, la variazione (libera) di $I + lJ$, su ciascun α, sia sempre nulla, e quella (libera, corrispondente al campo A) *su ciascun β, sia sempre maggiore o uguale a zero.*

Nel caso che valga la condizione **a)**, *è $l_1 = l_2$.*

Fisica. — *La velocità della luce si compone con quella della sorgente? Prove in favore offerte dai fenomeni delle « stelle variabili » e delle « nuove ».* Nota del Corrisp. M. La Rosa.

Fin dal 1910 circa Comstock (1) e Castelnuovo (2) avevano rilevato la possibilità di ottenere, per mezzo di osservazioni sulle « stelle doppie » una prova decisiva fra le opposte ipotesi fatte intorno alla velocità della luce, a fine di estendere il principio di relatività della meccanica ai fenomeni ottici ed elettro-magnetici (3).

Questi AA. si fermarono a considerare le curiose deformazioni che avrebbero dovuto presentarci gli intervalli di tempo decorrenti fra successivi passaggi dell'astro ruotante per i punti di quadratura.

Ma mentre lo stesso Comstock cercava di ottenere dalle non facili osservazioni un controllo diretto delle previste deformazioni, De Sitter (4) pubblicò una breve analisi sui fenomeni delle « doppie » che parve e pare ancora limpida e decisiva contro l'ipotesi (*balistica*) di Ritz (5), che ammetteva la composizione della velocità della luce con quella della sorgente, e quindi indirettamente in favore del postulato sulla « costanza della velocità della luce » che è la vera base della teoria di Einstein.

Ora un'analisi più completa delle conseguenze che scaturiscono dall'ipotesi balistica, dimostra che le conclusioni di De Sitter non sono esatte; in quanto prova che anche l'*ipotesi balistica consente larga possibilità alle osservazioni sulle « doppie » e sulle leggi del loro movimento.*

Ma vi è di più: la stessa analisi porta a spiegare in modo semplice ed immediato tutto un vasto gruppo di fatti astronomici: quelli *sulle « stelle*

(1) Comstock, Phys. Rev., vol. XXX, pag. 267, 1910.
(2) Castelnuovo, *Scientia*, vol. IX, pag. 71, 1911.
(3) Una notizia storico-critica su questo argomento fu data da me stesso in Nuovo Cimento, vol. III, pag. 345, 1912.
(4) De Sitter, Phys. Zeitschr., Bd. XIV, pag. 429, 1913.
(5) Ritz, Ann. d. chem. et phys., vol. XIII, pag. 145, 1908.