ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui numeri di Liouville e su un corpo non numerabile di numeri reali.* Nota di BEPPO LEVI, presentata dal Socio C. SEGRE.

1. *Un'osservazione relativa ai numeri di Liouville.* — È noto che il Liouville, partendo dall'osservazione che, se ξ è un numero algebrico reale (non razionale) di grado n, e $\frac{p}{q}$ una frazione il cui denominatore q sia sufficentemente grande, si ha

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right|>\frac{1}{q^{n+1}}\,, \tag{1}$$

riuscì facilmente a costruire tutta una classe non numerabile di numeri trascendenti (non algebrici). Tali sono, per es., tutti i numeri della forma

$$\eta=\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^{2!}}+\frac{\alpha_3}{10^{3!}}+\cdots+\frac{\alpha_n}{10^{n!}}+\cdots \tag{2}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sono cifre, infinite delle quali non sono 0.

Si ha di più che *ogni funzione razionale fratta a coefficienti interi di numeri di Liouville, che non sia un numero razionale, è un numero trascendente.* Consideriamo infatti una funzione razionale fratta di m variabili

$$f(u_1\,u_2\ldots u_m)=\frac{\varphi(u_1\,u_2\ldots u_m)}{\psi(u_1\,u_2\ldots u_m)}$$

dove φ e ψ sono funzioni razionali intere, a coefficienti interi, dei gradi rispettivi μ e ν. Sia $\zeta_1\,\zeta_2\ldots\zeta_m$ un sistema di valori delle u_i tale che

$$\psi(\zeta_1\,\zeta_2\ldots\zeta_m)\neq 0\,.$$

Si può allora determinare un ϱ, un M e due numeri A′, A″ tali che, per ogni sistema di valori delle u_i per cui $\zeta_i-\varrho\leq u_i\leq\zeta_i+\varrho$, sia

$$\left|f'_{u_1}(u_1\,u_2\ldots u_n)\right|<\mathrm{M}$$

$$|f(u_1\,u_2\ldots u_n)-f(\zeta_1\,\zeta_2\ldots\zeta_n)|<\mathrm{M}\sum_i|u_i-\zeta_i| \tag{3}$$

$$0<\mathrm{A}'<|\psi(u_1\,u_2\ldots u_n)|<\mathrm{A}''.$$

Se inoltre supponiamo di attribuire alle u_i valori razionali aventi denominator comune q, e poniamo

$$u_i = \frac{p_i}{q}$$

$$\varphi(u_1 u_2 \dots u_m) = \frac{1}{q^{\mu}} \Phi(p_1 p_2 \dots p_m q)$$

$$\psi(u_1 u_2 \dots u_m) = \frac{1}{q^{\nu}} \Psi(p_1 p_2 \dots p_m q)$$

(dove Φ e Ψ sono forme a coefficenti interi degli ordini rispettivi μ, ν), risulta

$$f(u_1 u_2 \dots u_m) = \frac{1}{q^{\mu-\nu}} \frac{\Phi(p_1 p_2 \dots p_m q)}{\Psi(p_1 p_2 \dots p_m q)}$$

$$A' q^{\nu} < |\Psi(p_1 p_2 \dots p_m q)| < A'' q^{\nu}.$$

Il valore di $f(u_1 u_2 \dots u_m)$ si esprime dunque mediante una frazione (eventualmente riduttibile) il cui denominatore è un intero Q tale che

$$A' q^{\tau} < Q < A'' q^{\tau},$$

dove τ è il maggiore degli interi μ e ν. Se supponiamo ancora di assumere $q > A''$, potremo dire che

$$A' q^{\tau} < Q < q^{\tau+1}. \tag{4}$$

Se i numeri $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ sono tali che esistano i razionali $\frac{p_i}{q}$, tali che

$$\left| \frac{p_i}{q} - \zeta_i \right| < \frac{1}{q^{\lambda}}$$

mentre il denominatore q soddisfa alle condizioni

$$q > \left(\frac{1}{\varrho}\right)^{1/\lambda}, \quad q > A'', \quad q > Mm,$$

da (3), (4) si ha

$$\left| f\left(\frac{p_1}{q} \frac{p_2}{q} \dots \frac{p_m}{q}\right) - f(\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_m) \right| < \frac{1}{q^{\lambda-1}} < \frac{1}{Q^{\frac{\lambda-1}{\tau+1}}};$$

per cui, a causa di (1), $f(\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_m)$ non potrebbe essere una radice irrazionale ξ di un'equazione algebrica a coefficienti interi di grado n, $F(\xi) = 0$, se non quando (supposto ancora q sufficentemente grande affinchè corrispondentemente a $F(\xi) = 0$ la (1) si verifichi quando a q vi si sostituisca $A' q^{\tau}$)

$$\frac{1}{Q^{\frac{\lambda-1}{\tau+1}}} > \frac{1}{Q^{n+1}}$$

e cioè

$$\lambda - 1 < (\iota + 1)(n + 1). \tag{4}$$

Se si suppone che $\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_m$ siano numeri di Liouville della forma (2), e le $\frac{p_i}{q}$ siano i numeri decimali che si ottengono limitando i rispettivi sviluppi (2) al termine k-esimo, si ha

$$q = 10^{k!} \qquad \lambda = k$$

e si può supporre k tanto elevato che siano soddisfatte tutte le condizioni imposte a q e non sia soddisfatta la (4). Ne risulta, come si voleva provare, che, per nessun valore di n, $f(\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_m)$ è radice di un'equazione algebrica di grado n.

2. *Esistenza di un corpo non numerabile di numeri reali.* — L'insieme di tutti i numeri di Liouville e di tutti i numeri che si esprimono come funzioni razionali (a coefficienti interi) di essi costituisce evidentemente un corpo. Esso non abbraccia la totalità dei numeri reali, perchè nessun numero algebrico non razionale appartiene ad esso. Esso è non numerabile perchè tale non è — notoriamente — l'aggregato dei numeri di Liouville (ciascun numero η della forma (2) potendosi far corrispondere a un numero decimale illimitato

$$\eta' = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \cdots,$$

per modo che a ogni numero decimale illimitato corrisponde un η).

E' immediato d'altronde che ogni corpo di numeri reali — e quindi quello accennato — contiene il corpo (numerabile) dei numeri razionali; e quindi è denso nel continuo lineare.

Il problema relativo all'esistenza di un corpo di numeri reali, non numerabile e distinto dal continuo fu proposto dal sig. Mazurkiewicz nel t. I dei Fundamenta Mathematicae (Warszawa 1920) e nel t. IV (1923) dello stesso periodico ne è pubblicata una soluzione del Souslin (*Sur un corps non dénombrable de nombres réels*, Mém. postume rédigé par C. Kuravowski). Il ragionamento del Souslin si presta ad essere generalizzato per mostrare che *assegnate p funzioni continue di n variabili $f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ si può sempre, in infiniti modi, determinare un aggregato non numerabile di numeri reali di misura piccola quanto si vuole, ed anche nulla, tale che ad esso appartengano tutti i valori delle f_i per valori delle variabili appartenenti all'aggregato medesimo.* Però l'assegnazione effettiva di un esempio non riesce agevole col metodo del Souslin, nè è fatta nella Memoria citata.

In una nota della stessa Memoria è ricordato che il sig. Lomnicki, in una Nota dei C. R. della Soc. delle Scienze di Varsavia (1918) che non mi fu possibile di conoscere, ha già dimostrato che l'aggregato minimo, il quale contiene le differenze dei suoi elementi, a 2 a 2, e contiene l'insieme dei numeri di Liouville non comprende la totalità dei numeri reali.

Matematica. — *Sulla rappresentazione in forma finita delle funzioni doppiamente o triplamente periodiche aventi nei rettangoli o nei parallelepipedi fondamentali forme assegnate ad arbitrio.* Nota dell'ing. L. LABOCCETTA, presentata dal Socio G. A. CROCCO.

1. — In una precedente Nota ho indicato un metodo generale per costruire una funzione semplicemente periodica il cui diagramma risulti formato da periodi costituiti ciascuno da uno o più archi di curve arbitrariamente date. Il metodo è estendibile al caso di una funzione di due variabili

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

che si voglia rendere doppiamente periodica assegnando i valori h ed i ai periodi di x ed y. Basta infatti scrivere

$$z = f\left[h \operatorname{Fr} \frac{x}{h}, i \operatorname{Fr} \frac{y}{i}\right] \tag{2}$$

oppure

$$z = f\left[h \operatorname{Cm} \frac{x}{h}, i \operatorname{Cm} \frac{y}{i}\right] \tag{3}$$

per avere una funzione doppiamente periodica la quale in ogni rettangolo fondamentale è formata, nel caso della (2) dalla parte della superficie (1) che ha per proiezione, nel piano X O Y, il rettangolo compreso fra gli assi e le due rette $y = h$, $x = i$, e nel caso della (3) dalla porzione di superficie che si ottiene costruendo la simmetrica rispetto all'asse O Z di quella del caso precedente.

Se l'origine cadesse nell'interno del rettangolo fondamentale alle distanze h_1, h_2 e i_1, i_2 dai suoi lati destro e sinistro, superiore e inferiore, basterebbe invece delle (2) e (3) scrivere

$$z = f\left[\left(h \operatorname{Fr} \frac{x - h_1}{h} - h_2\right), \left(i \operatorname{Fr} \frac{y - i_1}{i} - i_2\right)\right] \tag{4}$$

$$z = f\left[\left(h \operatorname{Cm} \frac{x - h_1}{h} - h_2\right), \left(i \operatorname{Cm} \frac{y - i_1}{i} - i_2\right)\right] \tag{5}$$