ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

In una nota della stessa Memoria è ricordato che il sig. Lomnicki, in una Nota dei C. R. della Soc. delle Scienze di Varsavia (1918) che non mi fu possibile di conoscere, ha già dimostrato che l'aggregato minimo, il quale contiene le differenze dei suoi elementi, a 2 a 2, e contiene l'insieme dei numeri di Liouville non comprende la totalità dei numeri reali.

Matematica. — *Sulla rappresentazione in forma finita delle funzioni doppiamente o triplamente periodiche aventi nei rettangoli o nei parallelepipedi fondamentali forme assegnate ad arbitrio.* Nota dell'ing. L. Laboccetta, presentata dal Socio G. A. Crocco.

1. — In una precedente Nota ho indicato un metodo generale per costruire una funzione semplicemente periodica il cui diagramma risulti formato da periodi costituiti ciascuno da uno o più archi di curve arbitrariamente date. Il metodo è estendibile al caso di una funzione di due variabili

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

che si voglia rendere doppiamente periodica assegnando i valori h ed i ai periodi di x ed y. Basta infatti scrivere

$$z = f\left[h \operatorname{Fr} \frac{x}{h}, i \operatorname{Fr} \frac{y}{i}\right] \tag{2}$$

oppure

$$z = f\left[h \operatorname{Cm} \frac{x}{h}, i \operatorname{Cm} \frac{y}{i}\right] \tag{3}$$

per avere una funzione doppiamente periodica la quale in ogni rettangolo fondamentale è formata, nel caso della (2) dalla parte della superficie (1) che ha per proiezione, nel piano X O Y, il rettangolo compreso fra gli assi e le due rette $y = h$, $x = i$, e nel caso della (3) dalla porzione di superficie che si ottiene costruendo la simmetrica rispetto all'asse O Z di quella del caso precedente.

Se l'origine cadesse nell'interno del rettangolo fondamentale alle distanze h_1, h_2 e i_1, i_2 dai suoi lati destro e sinistro, superiore e inferiore, basterebbe invece delle (2) e (3) scrivere

$$z = f\left[\left(h \operatorname{Fr} \frac{x - h_1}{h} - h_2\right), \left(i \operatorname{Fr} \frac{y - i_1}{i} - i_2\right)\right] \tag{4}$$

$$z = f\left[\left(h \operatorname{Cm} \frac{x - h_1}{h} - h_2\right), \left(i \operatorname{Cm} \frac{y - i_1}{i} - i_2\right)\right] \tag{5}$$

per avere una funzione consistente nella ripetizione periodica della porzione di superficie (1) che ha per proiezione il rettangolo compreso fra le rette $x = + h_1, x = - h_2, y = + i_1, y = - i_2$, e la sua simmetrica.

2. Data perciò l'equazione di un piano

$$z = x + y \tag{6}$$

applicando la (2) e cioè scrivendo

$$z = h \operatorname{Fr} \frac{x}{h} + i \operatorname{Fr} \frac{z}{i} \tag{7}$$

si ha l'equazione della funzione doppiamente periodica rappresentata dagli elementi del piano (6), che hanno per proiezione sul piano X O Y i rettangoli fondamentali, trasportati parallelamente all'asse O Z fino a toccare il piano X O Y col loro vertice inferiore.

Come applicazione della (4) si consideri l'equazione

$$z = \frac{1}{4}(h^2 + i^2) - (x^2 + y^2) \tag{8}$$

del paraboloide di rivoluzione intersecato dal piano X O Y nel circolo circoscritto al rettangolo fondamentale di lati h ed i con il centro nell'origine. L'equazione della funzione periodica rappresentata in ogni periodo dalla porzione di paraboloide (8) sovrapposta a questo rettangolo è

$$z = \frac{1}{4}(h^2 + i^2) - \left[\left(h \operatorname{Fr} \frac{2x - h}{2h} - \frac{1}{2} h\right)^2 + \left(k \operatorname{Fr} \frac{2y - i}{2i} - \frac{1}{2} i\right)^2 \right]. \tag{9}$$

3. — Una funzione doppiamente periodica può avere diverse espressioni analitiche in diverse aree dell'elemento fondamentale. In tal caso per la rappresentazione di essa occorrono tanti termini, per quante sono le aree dell'elemento fondamentale nelle quali la funzione ha espressioni analitiche diverse.

Così, supposto che le dette aree siano anche esse dei rettangoli determinati dalle parallele ai lati del rettangolo fondamentale e passanti per un punto P interno di esso le cui distanze dai lati sono h_1, h_2, i_1, i_2 e che in questi quattro rettangoli la funzione debba prendere i valori

$$z_1 = f_1(x\,y) \quad z_2 = f_2(x\,y) \quad z_3 = {}_3(x\,y) \quad z_4 = f_4(x\,y) \tag{10}$$

la questione è ridotta, applicando un metodo analogo a quello già esposto in una precedente Nota ([1]) per il caso delle funzioni periodiche di una sola

([1]) R. C. Vol. XXXI, fasc. 12, seduta 18 giugno 1922.

variabile, a trovar delle funzioni limitatrici a due valori

$$\Phi\, h_1\, i_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,,\quad \Phi\, h_1\, i_2 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,,\quad \Phi\, h_2\, i_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,,\quad \Phi\, h_2\, i_2 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,,$$

che limitino la validità delle (10), previamente rese doppiamente periodiche con i periodi h ed i, a ciascuno dei rettangoli parziali di lati $h_1\, i_1$, $h_1\, i_2$, $h_2\, i_1$, $h_2\, i_2$ rispettivamente e l'equazione diventa

$$(11)\quad z = f_1\left[h\,\mathrm{Fr}\,\frac{x}{h}\,,\, i\,\mathrm{Fr}\,\frac{y}{i}\right]\Phi\, h_1\, i_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + f_2\left[h\,\mathrm{Fr}\,\frac{x}{h}\,,\, i\,\mathrm{Fr}\,\frac{y}{i}\right]\Phi\, h_1\, i_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} +$$
$$+ f_3\left[h\,\mathrm{Fr}\,\frac{x}{h}\,,\, i\,\mathrm{Fr}\,\frac{y}{i}\right]\Phi\, h_2\, i_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + f_4\left[h\,\mathrm{Fr}\,\frac{x}{h}\,,\, i\,\mathrm{Fr}\,\frac{y}{i}\right]\Phi\, h_2\, i_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Le funzioni limitatrici adoperate possono avere ad esempio la forma

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\Phi\, h_1\, i_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \left[1 - \mathrm{sgn}\,\mathrm{I}\,\frac{h\,\mathrm{Fr}\,\frac{x}{h}}{h_1}\right]\left[1 - \mathrm{sgn}\,\mathrm{I}\,\frac{i\,\mathrm{Fr}\,\frac{y}{i}}{i_1}\right]\\
\Phi\, h_1\, i_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \left[1 - \mathrm{sgn}\,\mathrm{I}\,\frac{h\,\mathrm{Fr}\,\frac{x}{h}}{h_1}\right]\left[1 - \mathrm{sgn}\,\mathrm{I}\,\frac{i\,\mathrm{Cm}\,\frac{y}{i}}{i_2}\right]\\
\Phi\, h_2\, i_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \left[1 - \mathrm{sgn}\,\mathrm{I}\,\frac{h\,\mathrm{Cm}\,\frac{x}{h}}{h_2}\right]\left[1 - \mathrm{sgn}\,\mathrm{I}\,\frac{i\,\mathrm{Fr}\,\frac{y}{i}}{i_1}\right]\\
\Phi\, h_2\, i_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \left[1 - \mathrm{sgn}\,\mathrm{I}\,\frac{h\,\mathrm{Cm}\,\frac{x}{h}}{h_2}\right]\left[1 - \mathrm{sgn}\,\mathrm{I}\,\frac{i\,\mathrm{Cm}\,\frac{y}{i}}{i_2}\right]
\end{aligned}\right.$$

poichè, tenendo presente che sgn x si assume uguale a zero per x uguale a zero e che $\mathrm{Fr}\ x$ e $\mathrm{Cm}\ x$ sono quantità sempre positive, qualunque sia il segno di x, si scorge che le funzioni limitatrici (12) sono anch'esse doppiamente periodiche e ciascuna di esse ha costantemente il valore uno nel rettangolo parziale che ad essa corrisponde ed il valore zero negli altri tre rettangoli.

4. — Se le superfici rappresentative di ciascuna delle funzioni periodiche parziali sono dei piani, si hanno delle funzioni doppiamente periodiche *poliedriche.*

Così ad esempio, dato il piano egualmente inclinato rispetto ai tre assi

$$(13)\qquad x + y + z = d$$

si scorge agevolmente che l'equazione

$$z = d - \bmod x - \bmod y \tag{14}$$

rappresenta la piramide quadrangolare che ha il vertice sull'asse O Z nel punto $z = d$ e si estende al disotto di questo punto intersecando il piano X O Y nel quadrato di lato $a = d\sqrt{2}$ che ha i due assi O X, O Y come diagonali.

Si rende periodica questa funzione (15) applicando la (4) nella quale si fa $h_1 = h_2 = \frac{h}{2} = d$ e viene

$$z = d\left[1 - \bmod\left(2\,\mathrm{Fr}\,\frac{x-d}{2d} - 1\right) - \bmod\left(2\,\mathrm{Fr}\,\frac{y-d}{2d} - 1\right)\right]. \tag{15}$$

5. — Allo stesso modo come per le funzioni doppiamente periodiche si procede per le funzioni triplamente periodiche; quindi, data una funzione di tre variabili

$$w = f(x\,y\,z) \tag{16}$$

essa si rende triplamente periodica scrivendo

$$w = f\left(h\,\mathrm{Fr}\,\frac{x}{h},\, i\,\mathrm{Fr}\,\frac{y}{i},\, k\,\mathrm{Fr}\,\frac{z}{k}\right). \tag{17}$$

Di queste funzioni si può avere una rappresentazione fisica, attribuendo a w il valore di una grandezza che sia funzione delle coordinate. Supposto ad esempio che questa grandezza sia la densità δ della materia, e volendo rappresentare un reticolato spaziale di lato a, come se ne presentano nello studio dei sistemi cristallini, al centro di ogni cellula del quale si trova una sfera omogenea di raggio R e densità Δ, si comincia con lo scrivere l'equazione della sfera solida avente il centro nell'origine, e che come è agevole vedere è

$$\delta = \Delta\,\mathrm{I}\,\frac{1}{1 + \mathrm{I}\left[(x^2 + y^2 + z^2)/\mathrm{R}^2\right]} \tag{18}$$

e si rende poi periodica questa espressione scrivendo

$$\delta = \Delta\,\mathrm{I}\left[1\Big/\left(1 + \mathrm{I}\,\frac{a^2}{\mathrm{R}^2}\left\{\left(\mathrm{Fr}\,\frac{2x-a}{2a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\mathrm{Fr}\,\frac{2y-a}{2a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\mathrm{Fr}\,\frac{2z-a}{2a} - \frac{1}{2}\right)^2\right\}\right)\right] \tag{19}$$

6. — Tanto le funzioni doppiamente periodiche, quando quelle triplamente periodiche, possono essere sia smorzate con legge qualsiasi, sia essere limitate nel campo della loro esistenza entro spazi di forma assegnata. Basta perciò servirsi di funzioni limitatrici, a tre variabili, opportunamente scelte.

Estendendo, per esempio, allo spazio a tre dimensioni, il metodo usato per formare le funzioni limitatrici (12) nel piano, è facile vedere che l'espressione

$$\left[1 - \operatorname{sgn} \mathrm{I}\left(\frac{2\,x}{a}\right)^2\right]\left[1 - \operatorname{sgn} \mathrm{I}\left(\frac{2\,y}{b}\right)^2\right]\left[1 - \operatorname{sgn}\left(\frac{2\,z}{c}\right)^2\right] \tag{20}$$

ha il valore $+1$ per tutti i punti interni del parallelepipedo rettangolo di spigoli a, b, c, con il centro dell'origine, ed il valore zero per ogni altro punto esterno ad esso. Perciò combinando una espressione di questo tipo, con una equazione

$$\delta = \Delta\,\psi_{\mathrm{R}}(x\,y\,z) \tag{21}$$

del tipo (19) e scrivendo ad esempio

$$\delta = \Delta\,\psi_{\mathrm{R}}(x\,y\,z)\left[1 - \operatorname{sgn} \mathrm{I}\left(\frac{2\,x}{a}\right)^2\right] \left[1 - \operatorname{sgn} \mathrm{I}\left(\frac{2\,y}{a}\right)^2\right]\left[1 - \operatorname{sgn} \mathrm{I}\left(\frac{2\,z}{a}\right)^2\right] \tag{22}$$

si ha la rappresentazione del reticolato (19) limitato all'interno dell'esaedro di lato a con il centro nell'origine.

Come si scorge queste funzioni triplamente periodiche danno il modo di rappresentare analiticamente la struttura materiale di un cristallo di forma qualsiasi avente molecole formate da atomi diversi la cui struttura è assegnata, l'esempio addotto riferendosi ad un cristallo cubico con atomi di una sola specie rappresentati in modo semplice da una sfera omogenea.

Fisica matematica. — *La trasformazione di Voigt-Lorentz nella fisica classica e nella fisica relativista.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio A. DI LEGGE [1].

Nella sua recente Nota *Sulla trasformazione di Voigt-Lorentz* [2] il prof. Somigliana, dopo di aver impostata molto elegantemente la questione di questa trasformazione nello schema della fisica classica, dal fatto che espressioni di fenomeni dedotti per mezzo di tale trasformazione trovino la loro interpretazione tanto nel campo classico, quanto in quello einsteiniano, crede di poter concludere *che nessuna esperienza possa esser invocata come decisiva in favore dell'una o dell'altra interpretazione.*

[1] Presentata nella seduta del 18 marzo 1923.

[2] Questi Rendiconti, vol. XXXI, ser. 5ª, 1º sem., pag. 409.