

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA NAZIONALE  
DEI LINCEI

ANNO CCCXX  
1923

---

SERIE QUINTA

---

RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

limitate nel campo della loro esistenza entro spazi di forma assegnata. Basta perciò servirsi di funzioni limitatrici, a tre variabili, opportunamente scelte.

Estendendo, per esempio, allo spazio a tre dimensioni, il metodo usato per formare le funzioni limitatrici (12) nel piano, è facile vedere che l'espressione

$$(20) \quad \left[ 1 - \operatorname{sgn} I \left( \frac{2x}{a} \right)^2 \right] \left[ 1 - \operatorname{sgn} I \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] \left[ 1 - \operatorname{sgn} I \left( \frac{2z}{c} \right)^2 \right]$$

ha il valore + 1 per tutti i punti interni del parallelepipedo rettangolo di spigoli  $a, b, c$ , con il centro dell'origine, ed il valore zero per ogni altro punto esterno ad esso. Perciò combinando una espressione di questo tipo, con una equazione

$$(21) \quad \delta = \Delta \psi_{\kappa}(x y z)$$

del tipo (19) e scrivendo ad esempio

$$(22) \quad \delta = \Delta \psi_{\kappa}(x y z) \left[ 1 - \operatorname{sgn} I \left( \frac{2x}{a} \right)^2 \right] \left[ 1 - \operatorname{sgn} I \left( \frac{2y}{a} \right)^2 \right] \left[ 1 - \operatorname{sgn} I \left( \frac{2z}{a} \right)^2 \right]$$

si ha la rappresentazione del reticolato (19) limitato all'interno dell'esaedro di lato  $a$  con il centro nell'origine.

Come si scorge queste funzioni triplamente periodiche danno il modo di rappresentare analiticamente la struttura materiale di un cristallo di forma qualsiasi avente molecole formate da atomi diversi la cui struttura è assegnata, l'esempio addotto riferendosi ad un cristallo cubico con atomi di una sola specie rappresentati in modo semplice da una sfera omogenea.

**Fisica matematica.** — *La trasformazione di Voigt-Lorentz nella fisica classica e nella fisica relativista.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio A. DI LEGGE<sup>(1)</sup>.

Nella sua recente Nota *Sulla trasformazione di Voigt-Lorentz*<sup>(2)</sup> il prof. Somigliana, dopo di aver impostata molto elegantemente la questione di questa trasformazione nello schema della fisica classica, dal fatto che espressioni di fenomeni dedotti per mezzo di tale trasformazione trovino la loro interpretazione tanto nel campo classico, quanto in quello einsteiniano, crede di poter concludere *che nessuna esperienza possa esser invocata come decisiva in favore dell'una o dell'altra interpretazione.*

<sup>(1)</sup> Presentata nella seduta del 18 marzo 1923.

<sup>(2)</sup> Questi Rendiconti, vol. XXXI, ser. 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., pag. 409.

L'egregio autore, che ha quasi solamente sfiorato questo argomento, non si indugia a ricercare se questa sua affermazione sussista effettivamente così, senza alcuna restrizione, come egli l'enuncia, o se non debba piuttosto esser contenuta entro certi limiti.

Lo scopo di questa Nota è appunto quello di rispondere a tale questione.

Nello svolgimento mi riferirò a due Note precedenti, nelle quali, indipendentemente dalle considerazioni del Somigliana, ho trattato le due questioni generali dell'*utilizzazione della trasformazione di V.-L. nel campo della fisica classica* <sup>(1)</sup> e dell'*interpretazione del principio della relatività (ristretta) tanto nello schema classico, quanto in quello einsteiniano* <sup>(2)</sup>.

A proposito della prima Nota dovrò aggiungere una considerazione (n. 1) che, per ragioni di spazio, allora ho omessa, relativamente al *substrato fisico*, o meglio alla *tacita ammissione di indole fisica*, che è implicita nel fatto stesso dell'impiego di quella trasformazione in questioni fisiche.

Fatto ciò potrò senz'altro precisare (n. 2) entro quali limiti debba, secondo me, esser contenuta l'affermazione del prof. Somigliana e finalmente (nn. 3-5) accennare ad un esempio eminentemente atto ad illustrare il complesso della questione.

\* \*

1. Come la maggior parte degli autori che in qualche modo avevano applicata la trasformazione di V.-L. e in particolare come il Voigt e il Somigliana, nella mia prima Nota, quantunque per facilità di espressione abbia parlato di emissione e di propagazione di onde, ho effettivamente considerato tale trasformazione come esclusivamente matematica, supponendola tacitamente senza alcuna ripercussione fisica sullo svolgimento delle questioni trattate.

Ora quest'ultima supposizione costituisce di per sè un'ammissione fisica, della quale è necessario rendersi conto.

Per quanto riguarda la parte differenziale delle questioni trattate, pare ovvio ritenere che la trasformazione di V.-L., la quale lascia inalterate le equazioni che esprimono l'andamento differenziale dei fenomeni, non implichi necessariamente alcuna nuova ipotesi sui fenomeni stessi.

Per quanto riguarda invece la parte integrale, e specialmente le condizioni ai limiti, la cosa non è più così ovvia.

Come abbiamo veduto nella prima Nota, le superficie limiti per la trasformazione non rimangono invariate come le equazioni differenziali delle onde, ma subiscono delle deformazioni e vengono a trovarsi in movimento traslatorio. Ora il supporre che ciò non perturbi essenzialmente il fenomeno.

<sup>(1)</sup> Questi Rendiconti, questo volume, pag. 118.

<sup>(2)</sup> Ibid., *ibid.*, pag. 221.

o che non avvengano almeno fenomeni accessori perturbatori, costituisce una vera nuova ammissione fisica, che in generale dovrà esser discussa.

Nel caso di una superficie che emetta luce, l'ipotesi che si introduce è in fondo quella di ammettere che la vibrazione passi dalla superficie all'etere nello stesso modo, tanto quando superficie ed etere siano in quiete relativa, quanto quando siano invece in relativo moto, cioè senza che si manifesti alcun fenomeno dovuto al movimento della superficie in seno all'etere; ipotesi senza dubbio arbitraria, tanto che molte volte si suppose appunto l'opposto, e che non potrebbe assolutamente applicarsi all'analogo caso acustico, perchè sarebbe assurdo supporre che una superficie risuonante si muovesse nell'aria senza produrvi dei movimenti perturbatori.

2. Siamo ora in grado di considerare la questione posta dal prof. Somigliana.

Può avvenire che sia conveniente utilizzare la trasformazione di V.-L. come puro mezzo matematico per passare da note espressioni di fenomeni, a espressioni di altri fenomeni più o meno in relazione coi primi e anche, usando opportuni accorgimenti, per risolvere nuovi problemi. In tal caso il principio di relatività non entra affatto in giuoco (ved. Nota 1<sup>a</sup>).

Ma non è questa applicazione prevalentemente matematica l'applicazione più importante della trasformazione di V.-L.

Di gran lunga più importante è la sua applicazione fisica, vale a dire quella che si fa annettendo a questa trasformazione il significato eminentemente fisico di esser la trasformazione che si deve usare per passare da un sistema di riferimento dato ad un altro supposto in traslazione relativamente ad esso, quando si voglia contemporaneamente anche render conto del principio di relatività (vedi Nota 2<sup>a</sup>). Quest'applicazione può farsi in due modi o meglio secondo due interpretazioni, svolgentisi una nello schema della fisica classica, l'altra nello schema einsteiniano.

Ed è solamente fra queste due interpretazioni, entrambe relativiste, che l'esperienza non può esser invocata come decisiva.

3. Per illustrare quanto precede con un esempio che permetta di porre in evidenza tutto il complesso della questione, ricorriamo, come ordinariamente si usa, ad un'esperienza ideale. Consideriamo cioè come una sfera irraggiante, di raggio  $r_s$ , supposta dapprima in quiete, poi in traslazione colla velocità costante  $v_s$ , rispetto all'etere, debba apparire ad un osservatore esterno supposto egli pure in quiete o in traslazione di velocità  $v_0$ .

4. Consideriamo dapprima il caso *a)* della *sfera fissa* e dell'*osservatore mobile*.

L'equazione delle onde propagate è la notissima:

$$(1) \quad u = A \left( \frac{r_s}{r} \right)^2 \text{sen} \frac{2\pi}{T_s} \left( t - \frac{r - r_s}{c} \right)$$

che sulla superficie emittente della sfera  $r = r_s$  si riduce a

$$(2) \quad \bar{u} = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_s} t,$$

espressione della vibrazione della sorgente stessa.

Per un osservatore mobile colla velocità radiale  $v_0$  il periodo è notoriamente

$$(3) \quad T_0 = T_s \frac{c}{c - v_0}.$$

Passiamo ora al caso *b*) della *sfera mobile* e dell'*osservatore fisso*.

Secondo i criteri e le notazioni della prima Nota e nell'ipotesi fisica discussa al n. 1, per giungere all'espressione delle onde emananti dalla superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = r_s^2$ , supposta in traslazione uniforme secondo l'asse delle  $x$  e vibrante uniformemente secondo la 2), occorrerebbe determinare dapprima l'espressione delle onde emananti dall'ellissoide allungato

$$\frac{x^2}{(kr_s)^2} + \frac{y^2}{r_s^2} + \frac{z^2}{r_s^2} = 1 \quad k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

vibrante colla legge:

$$\bar{u} = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_s} \left( \frac{t}{k} - k \frac{v_s x}{c^2} \right)$$

e applicare ad essa la trasformazione di V.-L.

Senza esplicitare questo calcolo, che non potrebbe esser contenuto in questa Nota, possiamo già intanto rilevare che un osservatore fisso osserverebbe un periodo di vibrazioni differente dal 3), come d'altra parte risulta evidente considerando i notissimi casi limiti di una sorgente piana (sfera di raggio grandissimo), oppure di una sorgente puntiforme per cui si ha:

$$(3') \quad T_0 = T_s \frac{c - v_s}{c}.$$

Possiamo quindi concludere che, secondo la teoria classica, l'osservazione dei periodi, nei due diversi casi considerati, dovrebbe permettere la determinazione del moto assoluto della sorgente e dell'osservatore, analogamente a quanto avviene nel caso acustico.

4. Se poi ammettiamo il risultato che pare emergere da molte esperienze, che una tale determinazione non sia possibile, cioè se ammettiamo il *principio di relatività*, sappiamo anche che possiamo render conto di questo

fatto ammettendo che le formule convenienti per trasformare le espressioni dei fenomeni fisici da un sistema dato ad un altro sistema in traslazione rispetto ad esso, siano le equazioni di trasformazione di V.-L.

Come è stato ricordato nella Nota 2<sup>a</sup>, esse sono suscettibili di due interpretazioni di natura differentissime, ma, agli effetti della rappresentazione dei fenomeni, perfettamente equivalenti.

Per la prima, che si svolge completamente nello schema classico, dobbiamo ammettere da una parte *a'*) che sussistano le equazioni 1) e 2), ma che all'osservatore in moto si siano alterati gli strumenti di misura spaziale e temporale; dall'altra *b'*) che la superficie sferica emittente si sia trasformata nell'ellissoide appiattito

$$(kx)^2 + y^2 + z^2 = r_s^2$$

vibrante colla legge

$$u = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left( kt + k \frac{vx}{c^2} \right).$$

Allora, come è noto, le equazioni corrispondenti alle 3) e 3') si vengono a confondere in un'unica equazione, ove non appaiano più le velocità assolute  $v_0$  e  $v_s$  dell'osservatore e della sorgente luminosa, ma solamente la loro velocità relativa  $v_r$ ; ossia

$$T_0 = T_s \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{v_r}{c} \right).$$

La seconda interpretazione poi è la notissima einsteiniana.

5. *Conclusione.* Ora è evidente che fra le espressioni del fenomeno considerato, essenzialmente differenti quando si ammetta o non si ammetta il principio di relatività, l'esperienza e solamente essa può esser invocata a decidere, anche se le varie espressioni sono state dedotte facendo uso di trasformazioni di V.-L. (nel primo caso come di trasformazioni prevalentemente matematiche e col solo significato fisico accennato al n. 1; nel secondo annettendovi il significato fisico più profondo ed essenziale tante volte ricordato, di trasformazioni cioè in stretto accordo col principio di relatività).

Ove invece nessuna esperienza non potrà mai esser invocata come decisiva è nella scelta fra le due possibili interpretazioni del secondo caso, la classica e l'einsteiniana.

E con questa restrizione la conclusione del prof. Somigliana sussiste rigorosamente.