ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Se nella $\mu = \nu A + R$ non è $R = 0$ si può proseguire nello stesso modo la divisione di ν per R e si troverà:

$$\nu = RA_1 + R_1 \qquad \text{con} \qquad N(R_1) < N(\nu)$$

e così di seguito. L'operazione termina certamente con un resto R_n che divide il precedente R_{n-1} e questo perchè i numeri interi positivi

$$N(\nu)\ ,\ N(R)\ ,\ N(R_1) \ldots$$

formano una serie decrescente, che perciò si arresta.

Scriviamo la catena limitata d'uguaglianze:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu = \nu A + R & N(R) < N(\nu) \\ \nu = RA_1 + R_1 & N(R_1) < N(R) \\ R = R_1 A_2 + R_2 & N(R_2) < N(R_1) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ R_{n-2} = R_{n-1} A_n + R_n & N(R_n) < N(R_{n-1}) . \end{array}\right.$$

Vediamo così che ogni divisore comune di μ, ν divide per la 1ª anche R, quindi per la 2ª R_1 ecc. e infine R_n. È pure chiaro che R_n dividendo R_{n-1} divide R_{n-2}, divide $R_{n-3} \ldots$ e infine μ, ν.

Si conclude che R_n è il divisore comune di massima norma di μ, ν e dicesi perciò il loro *massimo comun divisore*.

Resta così dimostrato che:

« *Nel corpo delle radici quinte dell'unità vale sempre l'algoritmo delle successive divisioni* ».

Matematica. — *Genesi cinematica intrinseca del parallelismo di Levi-Civita per le superficie a curvatura costante.* Nota di GIUSEPPE CORBELLINI, presentata dal Socio CASTELNUOVO.

1. Prendiamo le mosse dalla definizione costruttiva del parallelismo superficiale di Levi-Civita [1] nella forma riproducente nel campo infinitesimale il comportamento delle parallele euclidee.

Sopra una superficie, dati due punti P e P′ infinitamente vicini ed una direzione uscente da P e appartenente alla superficie, si dirà parallela ad essa in P′ quella direzione uscente da P′ che forma in P′ con la geodetica PP′ lo stesso angolo che la direzione data forma in P con la geodetica stessa.

Supposta ora tracciata sopra una superficie una curva t passante per P e per P′, sulla quale sia assegnato come verso positivo quello che va da P

[1] T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo* ecc. Rend. Circ. Palermo, tomo 42°, 1917, pp. 173 e seg.; F. Severi, *Sulla curvatura* ecc. ibid, pp. 227 e seg.

a P′, la costruzione precedente ripetuta per gli infiniti punti della curva successivi a P permette di caratterizzare in un punto Q di t, a distanza finita da P, la direzione parallela alla direzione assegnata in P. Si dice allora che la direzione data è stata trasportata per parallelismo da P a Q secondo la curva di trasporto t.

Risulta subito dalle costruzioni precedenti che il nuovo parallelismo gode della proprietà, fondamentale per il parallelismo euclideo, di conservare gli angoli e cioè la corrispondenza per parallelismo tra due fasci di direzioni è un'uguaglianza diretta.

2. Sfruttiamo questa circostanza riferendoci alle superficie a curvatura costante, le quali godono, com'è noto, della proprietà che figure uguali tracciate in esse si possono portare a coincidere l'una con l'altra mediante uno strisciamento della superficie su se stessa; vale a dire poniamoci il problema di caratterizzare sopra le superficie a curvatura costante non nulla i movimenti atti a portare a coincidere fasci di direzioni corrispondenti fra loro per parallelismo.

Per fissare le idee ci riferiremo di regola ad una sfera di raggio reale R; il lettore s'accorgerà peraltro che, con lievi modificazioni formali, il ragionamento è valido anche per le pseudosfere, purchè queste superficie si immaginino idealmente proseguite in modo da realizzare l'intero piano della metrica proiettiva iperbolica. Inoltre converremo di riguardare come un unico punto della sfera la coppia di punti diametralmente opposti su di essa.

3. Per il caso del trasporto infinitesimale da P a P′ la caratterizzazione del movimento è immediata. Esso trasporta il fascio delle direzioni uscenti da P in guisa che il punto P si porti in P′ e che la direzione PP′ scorra sopra il cerchio massimo individuato da P e P′. Tale movimento consiste in una rotazione infinitesima della superficie solidale con il fascio P, intorno al polo del cerchio massimo individuato da P e P′; l'ampiezza della rotazione è misurata da $\frac{\widehat{PP'}}{R}$.

4. La composizione di infiniti casi elementari per tutti i punti della curva t successivi a P ci permette ora di risolvere il problema integrale consistente nel definire un movimento continuo della sfera su sè stessa, durante il quale un fascio di direzioni avente il suo vertice in un punto della curva t si sposta sulla superficie in modo che le posizioni successive di ciascuna delle sue direzioni siano parallele alla posizione iniziale rispetto alla curva t.

Trattandosi di un movimento continuo per applicabilità esso sarà determinato, astrazione fatta dallo spazio ambiente, allorchè si conoscano la curva base e la curva rotolante del movimento.

5. Sulla curva t fissiamo più punti P, P′, P″... infinitamente vicini fra loro e succedentisi nell'ordine scritto.

Rotando la superficie di un angolo $\frac{\widehat{PP'}}{R}$ intorno al polo del cerchio massimo PP′ si stabilisce tra il fascio di partenza in P e quello di arrivo in P′ una corrispondenza per parallelismo; successivamente la rotazione analoga intorno al polo del cerchio massimo P′P″ stabilisce tra il fascio costruito in P′ e quello di arrivo in P″ una corrispondenza per parallelismo, e così di seguito. Apparisce perciò che il movimento continuo richiesto è costituito dalla successione di infinite rotazioni di ampiezza infinitesima intorno al luogo dei poli dei cerchi massimi tangenti alla curva t, cioè intorno alla polare di t. Poichè questa curva va immaginata solidale con la t, che durante il trasporto per parallelismo resta fissa, essa va riguardata come la curva base del movimento continuo.

6. Per determinare la curva che durante il movimento rotola senza strisciare sopra la curva dianzi caratterizzata, si potrebbe sfruttare la circostanza che l'ampiezza di ogni rotazione infinitesima uguaglia l'angolo di contingenza della curva base nel centro di rotazione. Ma si può procedere più speditamente così: immaginiamo il fascio di direzioni che si trasportano per parallelismo solidale con il fascio dei circoli massimi individuati da quelle direzioni. Denomineremo per brevità fascio mobile la figura costituita da questi circoli massimi. Notiamo che il centro di rotazione si trova costantemente sopra il cerchio massimo (variabile in generale nel fascio mobile) che è normale alla curva di trasporto; inoltre ha distanza sferica $\frac{1}{2}\pi R$ dal vertice del fascio. Da ciò si conclude che il luogo dei centri delle rotazioni immaginato solidale col fascio mobile, è il circolo massimo polare del vertice del fascio stesso.

Vi è un caso in cui non muta il circolo massimo del fascio mobile sul quale si trova il centro di rotazione, quando cioè la curva t è essa stessa un circolo massimo.

Ma anche questo caso d'eccezione si può far rientrare convenzionalmente nel caso generale.

7. Potremo così concludere: *assegnata sulla sfera una curva t, l'operazione di trasportare per parallelismo secondo t un fascio di direzioni avente il vertice sulla curva t, equivale ad un movimento continuo della sfera su sè stessa, nel quale la curva base è la polare della curva t e la curva rotolante è il cerchio massimo polare del vertice del fascio di direzioni.*

8. Se si trasporta un fascio di direzioni lungo un arco finito $\widehat{PQ}$ della curva t, è manifesto che tanto sulla curva base che sulla rotolante il punto di contatto descrive un arco che, a meno del fattore R, è uguale al valore assoluto del divario fra gli angoli che la curva di trasporto forma in P ed in Q con due direzioni parallele fra loro.

Si trova così una proposizione [1] (che è un' immediata conseguenza della caratterizzazione del parallelismo da cui siamo partiti) affermante che il divario fra gli angoli nominati è espresso, a parte il segno, dall' integrale dell'angolo di contingenza della curva di trasporto esteso all'arco $\widehat{PQ}$.

9. Per applicare la genesi cinematica intrinseca esposta, facciamo due osservazioni: anzitutto un generico circolo massimo del fascio mobile incontra perpendicolarmente il circolo massimo rotolante; il punto d' intersezione descrive, durante il movimento, una evolvente della curva base del movimento stesso, la quale è inviluppata dal circolo massimo considerato; in secondo luogo il punto di contatto con l' inviluppo dista di $\frac{1}{2}\pi R$ dal vertice del fascio mobile.

10. Supponiamo ora data sulla sfera una curva l e consideriamo il sistema dei circoli massimi che la inviluppano (ciascuno dei quali si immaginerà terminato al punto di contatto con l). Proponiamoci di determinare una traiettoria t del sistema che sia tagliata dai cerchi massimi dati secondo direzioni parallele.

Si presentano due vie. La prima osservazione precedente mostra che questa traiettoria ha per polare la evoluta di l. La seconda osservazione permette di costruire la traiettoria t staccando su ciascuno dei circoli massimi del sistema, un arco uguale a $\frac{1}{2}\pi R$ a partire dal punto di contatto con l'inviluppo l. Evidentemente entrambi le costruzioni indicate conducono alla medesima traiettoria t.

11. Si può anzi mostrare che non esiste altra curva, oltre quella caratterizzata, che sia distinta dai circoli massimi del sistema, e che sia tagliata da questi secondo direzioni parallele.

La dimostrazione si fa per assurdo. Supponiamo che esistano due traiettorie t e t' distinte fra loro e godenti della detta proprietà. Due generici circoli massimi del sistema, infinitamente vicini fra loro, taglino la curva t, rispettivamente nei punti A e B, e la curva t' rispettivamente nei punti A' e B'. L' ipotesi che la t' sia distinta dalla t, porta di conseguenza che esisteranno alcune coppie di circoli massimi come quella considerata, per le quali gli archetti infinitesimi $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$ non hanno punti in comune fra loro. Se ora si considerano gli archetti infinitesimi di geodetica che congiungono A con B ed A' con B', si rileva che il quadrangolo ABB'A' è un quadrangolo geodetico non intrecciato che, per la definizione del parallelismo, ha coppie di angoli interni (quelli rispettivamente adiacenti ai lati $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$) supplementari fra loro.

[1] Essa è contenuta implicitamente in una formula del Levi-Civita (Mem. cit. § 9) sotto forma più generale, relativamente cioè ad una superficie generica.

Ma ciò è assurdo. Pertanto la curva t' deve coincidere o con la t o con uno dei circoli massimi del sistema.

12. Nel caso speciale della sfera la traiettoria t di un sistema di circoli massimi (§ 10) è sempre propria; non così sulla pseudosfera per la quale è opportuno distinguere in un sistema di geodetiche tre regioni, secondo che le geodetiche toccano il loro inviluppo in un punto proprio, improprio o ideale. È ovvio che la traiettoria t è costituita da punti proprî solo nella regione delle geodetiche che toccano l'inviluppo in un punto ideale. In particolare in un fascio improprio di geodetiche non esiste una traiettoria t costituita da punti proprî; cioè in altri termini, il parallelismo di Levi-Civita non ha rapporto con il parallelismo di Lobatschefskij.

Matematica. — *Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche.* Nota del dott. Giulio Darbi, presentata dal Socio L. Bianchi.

Un lavoro del prof. Capelli [1] « Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche », mi ha suggerito l'idea della presente Nota, che si propone di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione in x, che si ottiene eliminando le $(n-1)$ variabili $y, z, \ldots u, v, w$ dalle n equazioni del sistema:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, \ldots u, v, w) &= 0 \\ f_2(y, z, \ldots\ldots u, v, w) &= 0 \\ f_3(z \ldots\ldots\ldots u, v, w) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_{n-2}(u, v, w) &= 0 \\ f_{n-1}(v, w) &= 0 \\ f_n(w) &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

sia irreduttibile in un campo di razionalità K, a cui appartengono i coefficienti delle precedenti equazioni, che sono razionali intere rispetto alle variabili $x, y, z, \ldots u, v, w$.

I risultati esposti nelle pagine che seguono, trovano utile applicazione ad una importante e nota [2] classe di equazioni.

1. Date le equazioni $V(y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, con coefficienti appartenenti ad un campo di razionalità K, supponiamo che l'equazione $f(x) = 0$, che si ottiene eliminando y dalle precedenti equazioni, abbia tutte le sue radici $x_1, x_2, \ldots x_n$ distinte.

[1] Cfr. Alfredo Capelli, *Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche.* Giornale di matematiche di Battaglini. Nota III, anno 1904, Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli. Maggio 1898.

[2] Cfr. Henri Weber, *Traité d'Algèbre supérieure*, § 150, pp. 531-533, deuxième édition 1898.