ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Ma ciò è assurdo. Pertanto la curva t' deve coincidere o con la t o con uno dei circoli massimi del sistema.

12. Nel caso speciale della sfera la traiettoria t di un sistema di circoli massimi (§ 10) è sempre propria; non così sulla pseudosfera per la quale è opportuno distinguere in un sistema di geodetiche tre regioni, secondo che le geodetiche toccano il loro inviluppo in un punto proprio, improprio o ideale. È ovvio che la traiettoria t è costituita da punti proprî solo nella regione delle geodetiche che toccano l'inviluppo in un punto ideale. In particolare in un fascio improprio di geodetiche non esiste una traiettoria t costituita da punti proprî; cioè in altri termini, il parallelismo di Levi-Civita non ha rapporto con il parallelismo di Lobatschefskij.

Matematica. — *Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche.* Nota del dott. GIULIO DARBI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Un lavoro del prof. Capelli [1] « Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche », mi ha suggerito l'idea della presente Nota, che si propone di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione in x, che si ottiene eliminando le $(n-1)$ variabili $y, z, \dots u, v, w$ dalle n equazioni del sistema:

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(x, y, z, \dots u, v, w) = 0\\
&f_2(y, z, \dots\dots u, v, w) = 0\\
&f_3(z \dots\dots\dots\dots u, v, w) = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_{n-2}(u, v, w) \qquad\quad = 0\\
&f_{n-1}(v, w) \qquad\qquad = 0\\
&f_n(w) \qquad\qquad\quad\;\; = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

sia irreduttibile in un campo di razionalità K, a cui appartengono i coefficienti delle precedenti equazioni, che sono razionali intere rispetto alle variabili $x, y, z, \dots u, v, w$.

I risultati esposti nelle pagine che seguono, trovano utile applicazione ad una importante e nota [2] classe di equazioni.

1. Date le equazioni $V(y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, con coefficienti appartenenti ad un campo di razionalità K, supponiamo che l'equazione $f(x) = 0$, che si ottiene eliminando y dalle precedenti equazioni, abbia tutte le sue radici $x_1, x_2, \dots x_n$ distinte.

(1) Cfr. Alfredo Capelli, *Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche.* Giornale di matematiche di Battaglini. Nota III, anno 1904, Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli. Maggio 1898.

(2) Cfr. Henri Weber, *Traité d'Algèbre supérieure,* § 150, pp. 531-533, deuxième édition 1898.

Le due equazioni $V(y) = 0$, $\psi(x_i, y) = 0$ ammettono una sola radice comune y_1, che si può quindi esprimere in funzione razionale intera di x_i, con coefficienti appartenenti a K, cioè si ha: $y_1 = \varphi(x_i)$.

È chiaro che, operando sull'equazione $f(x) = 0$ la trasformazione $y = \varphi(x)$, l'equazione in y a radici distinte, la quale ha per radici i differenti valori che può assumere y per tutti i valori $x_1, x_2, \ldots x_n$, è equivalente all'equazione $V(y) = 0$, ed il primo membro dell'equazione $\psi(x, y_1) = 0$ coincide, a meno di un fattore costante, col massimo comune divisore fra $f(x)$ e $\varphi(x) - y_1$.

Il prof. Capelli [1] dimostra il seguente teorema:

« Affinchè l'equazione $f(x) = 0$ sia irreduttibile nel campo di razionalità K, è necessario e sufficiente che l'equazione trasformata $V(y) = 0$ sia irreduttibile nello stesso campo K e che l'equazione $\psi(x, y_1) = 0$ (ove y_1 è una radice di $V(y) = 0$), sia irreduttibile nel campo (K, y_1) ».

2. Dato il sistema (1), supponiamo che la prima equazione sia di grado m_1 rispetto ad x; la seconda sia di grado m_2 rispetto ad y; in generale l'i^{ma} equazione sia di grado m_i rispetto alla variabile che, fra le altre, vi occupa il primo posto; l'ultima equazione, cioè $f_n(w) = 0$ sia di grado m_n rispetto a w. L'equazione $F_{n-1}(x) = 0$, che si ottiene eliminando $y, z, \ldots u, v, w$ dalle equazioni del sistema (1), è di grado $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots m_n$ in x; supponiamo che abbia tutte le radici distinte. Eliminiamo y dalle due prime equazioni del sistema (1) e sia $F_1(x, z, \ldots u, v, w) = 0$ la risultante ottenuta. Dalla terza equazione del sistema (1) e dalla precedente eliminiamo z ed avremo l'equazione $F_2(x, \ldots u, v, w) = 0$. Così, seguendo lo stesso procedimento, perverremo all'equazione $F_{n-2}(x, w) = 0$, che risulta dalla eliminazione di v dalle due equazioni $F_{n-3}(x, v, w) = 0$, $f_{n-1}(v, w) = 0$. Se, dalle due equazioni $F_{n-2}(x, w) = 0$, $f_n(w) = 0$, eliminiamo w, otteniamo l'equazione $F_{n-1}(x) = 0$. Avendo supposto che tale equazione abbia tutte le radici distinte, altrettanto deve accadere per ciascuna delle equazioni del tipo $F_i(x, \ldots u_1, v_1, w_1) = 0$, essendo $(\ldots u_1, v_1, w_1)$ una delle soluzioni che soddisfano al sistema delle ultime $(n-1)$ equazioni di (1). L'equazione $F_{n-1}(x) = 0$, provenendo dalla eliminazione di w dalle due equazioni $F_{n-2}(x, w) = 0$, $f_n(w) = 0$, è, pel teorema del Capelli, irreduttibile in K se l'equazione $f_n(w) = 0$ è irreduttibile nello stesso campo K e se l'equazione $F_{n-2}(x, w_1) = 0$ (ove w_1, è una radice scelta a piacere dell'equazione $f_n(w) = 0$) è irreduttibile nel campo (K, w_1). Analogamente, l'equazione $F_{n-2}(x, w_1) = 0$ è irreduttibile nel campo (K, w_1), se l'equazione $f_{n-1}(v, w_1) = 0$ è irreduttibile in questo medesimo campo, e se l'equazione $F_{n-3}(x, v_1, w_1) = 0$ è irreduttibile nel campo (K, v_1, w_1), essendo (v_1, w_1) una soluzione scelta a piacere del sistema $f_n(w) = 0$, $f_{n-1}(v, w) = 0$. Il ragionamento, da fare

[1] Cfr. Capelli, già citata Nota.

sull'equazione $F_{n-3}(x, v_1, w_1) = 0$ e sulle altre, è analogo a quello testè seguito e conduce al seguente teorema:

« La condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione $F_{n-1}(x) = 0$ (a radici distinte) che si ottiene eliminando $y, z, \dots u, v, w$ dalle equazioni del sistema (1), sia irreduttibile nel campo di razionalità K, è che le equazioni:

$$f_1(x; y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1) = 0 \ , \ f_2(y; z_1, \dots u_1, v_1, w_1) = 0 ,$$

$$f_{n-2}(u; v_1, w_1) = 0 \ , \ f_{n-1}(v; w_1) = 0 \ , \ f_n(w) = 0 .$$

siano irreduttibili rispettivamente nei campi:

$$(K, y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1) \ , \ (K, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$$

$$(K, u_1, v_1, w_1) \ , \ (K, v_1, w_1) \ , \ (K, w_1) \ , \ K ,$$

ove $(y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$ rappresenta una soluzione, scelta a piacere, del sistema costituito dalle ultime $(n-1)$ equazioni di (1) ».

3. Le due equazioni $f_n(w) = 0$, $F_{n-2}(x_1, w) = 0$ ammettono una sola radice w_1 in comune perchè, come abbiamo supposto, l'equazione in x: $F_{n-1}(x) = 0$ ha tutte le radici distinte; si ha quindi l'uguaglianza (2) $w_1 = \varphi_1(x_1)$, cioè w_1, è un numero del campo (K, x_1).

Analogamente, le due equazioni: $f_{n-1}(v, w_1) = 0$, $F_{n-3}(x_1, v, w_1) = 0$ ammettono una sola radice v_1 in comune, che sarà quindi un numero del campo (K, x_1, w_1), ossia, tenuto conto della (2), un numero del campo (K, x_1), cioè: $v_1 = \varphi_2(x_1)$. In modo analogo si dimostra che, $y_1, z_1, \dots, u_1, v_1, w_1$ sono numeri del campo (K, x_1), cioè si possono esprimere in funzione razionale intera di x_1, con coefficienti appartenenti a K.

Se la prima equazione del sistema (1) risulta lineare in x, si ha dunque la seguente eguaglianza:

$$(K, x_1) = (K, y_1, z_1, \dots, u_1, v_1, w_1)$$

4. Denotiamo con $K_n, K_{n-1}, \dots, K_2, K_1$ rispettivamente i campi $(K, y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$, $(K, z_1, \dots u_1, v_1, w_1) \dots (K, w_1)$, K. Se il primo membro dell'equazione $f_1(x; y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1) = 0$ si decompone in λ_1 fattori irreduttibili in K_n, denotiamo con $\varphi_1(x; y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$ uno di tali fattori; analogamente, sia $\varphi_2(y; z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$ uno dei λ_2 fattori irreduttibili nel campo K_{n-1}, in cui si decompone il primo membro dell'equazione: $f_2(y; z_1, \dots u_1, v_1, w_1) = 0$. Così continuando, sia $\varphi_n(w) = 0$ uno dei λ_n fattori irreduttibili in K, in cui si decompone il primo membro dell'equazione: $f_n(w) = 0$.

Consideriamo il sistema:

$$\left.\begin{array}{ll}\varphi_1(x\,,y\,,z\,,\ldots u\,,v\,,w) & = 0\\ \varphi_2(y\,,z\,,\ \ldots u\,,v\,,w) & = 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varphi_{n-1}(v\,,w) & = 0\\ \varphi_n(w) & = 0\end{array}\right. \qquad (1)'$$

Si denoti con $\Phi_1(x) = 0$ la risultante, che si ottiene dalla eliminazione di $y\,,z\,,\ldots u\,,v\,,w$, dalle equazioni (1)′, che formano un sistema della medesima forma di (1). Ricordando il teorema enunciato alla fine dell'art. 2, si ricava che l'equazione $\Phi_1(x) = 0$ è irreduttibile in K.

Se consideriamo gli altri fattori irreduttibili nei campi $K_n\,, K_{n-1}\,,\ldots,$ $K_2\,, K_1$, nei quali si decompongono rispettivamente i primi membri delle equazioni:

$$f_1(x\,;y_1\,,z_1\,,\ldots u_1\,,v_1\,,w_1) = 0 \quad , \quad f_2(y\,;z_1\,,\ldots u_1\,,v_1\,,w_1) = 0$$
$$\ldots f_{n-1}(v\,;w_1) = 0 \quad , \quad f_n(w) = 0\,, \quad (3)$$

otterremo altri sistemi analoghi ad (1)′ e quindi altre equazioni risultanti in x, cioè: $\Phi_1(x) = 0$, $\Phi_2(x) = 0$, ... $\Phi_\lambda(x) = 0$, le quali sono irreduttibili in K e non hanno alcuna radice in comune. Si ha dunque:

$$F_{n-1}(x) = \Phi_1(x)\cdot\Phi_2(x)\cdot\ldots\Phi_\lambda(x)\,.$$

Ora è facile dimostrare l'eguaglianza:

$$\lambda = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\ldots\cdot\lambda_n\,.$$

5. Dopo quanto si è detto nel precedente art., possiamo enunciare il seguente teorema:

« Il numero dei fattori irreduttibili in K, nei quali si spezza il primo membro dell'equazione in x, che si ottiene dalla eliminazione di $y\,,z,\ldots u\,,v\,,w$, dalle equazioni del sistema (1) è uguale al prodotto $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\ldots\lambda_n$, denotando λ_1 il numero dei fattori irreduttibili nel campo K_n nel quale si spezza la funzione $f_1(x\,;y_1\,,z_1\,,\ldots u_1\,,v_1\,,w_1)$; così λ_2 rappresenta il numero dei fattori irreduttibili in K_{n-1}, nel quale si spezza la funzione $f_2(y\,;z_1\,,\ldots u_1\,,v_1\,,w_1)$, in generale λ_i rappresenta il numero dei fattori irreduttibili nel campo K_{n-i+1}, in cui si spezza la funzione che occupa l' i^{mo} posto nel sistema (3) ».

6. Se si hanno più irrazionali algebrici $y_1\,,z_1\,,\ldots u_1\,,v_1\,,w_1$ rispetto ad un dato campo di razionalità K, sappiamo (1) che l'aggiunzione simultanea di essi al campo K può essere sostituita dall'aggiunzione al campo K di un solo irrazionale x_1. In altri termini, date più equazioni:

$$f_2(y) = 0\ ,\ f_3(z) = 0\ ,\ \ldots\ ,\ f_n(w) = 0\,. \quad (4)$$

che abbiano coefficienti appartenenti ad un dato campo K, è possibile [1] di costruire una funzione razionale $x = f_1(y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$ delle radici delle precedenti equazioni, tale che, eliminando da queste le variabili $y, z, \dots u, v, w$, si ottenga per risultante in x l'equazione $F(x) = 0$, (5) le cui radici siano distinte, la quale gode della proprietà per cui, denotando con x_1 una di queste radici, si ha l'eguaglianza:

$$(K, x_1) = (K, y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1).$$

Poichè il sistema, che si ottiene aggregando alle equazioni (4) l'equazione: $x = f_1(y, z, \dots w)$, non è che un caso particolare del sistema (1), così potremo applicare alla (5) i risultati ottenuti in questa Nota.

Matematica. — *Un nuovo carattere distintivo dei gruppi di sostituzioni.* Nota del Dr. LUIGI FANTAPPIÈ, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Finora i gruppi di sostituzioni sopra lettere venivano distinti in transitivi e intransitivi, primitivi e imprimitivi, ecc.; e corrispondentemente avevamo un'importante classificazione delle equazioni algebriche a seconda dei loro gruppi di Galois [2].

A completare tale classificazione introdurremo ora il nuovo concetto di *sistaticità* di un gruppo di sostituzioni, importante sopratutto per ciò che riguarda l'esprimibilità di una radice in funzione razionale di un'altra; argomento questo da me già trattato per via prevalentemente algebrica in una precedente Nota [3].

2. Diremo dunque che un gruppo di sostituzioni G_N è *sistatico* quando tutte le sue sostituzioni che lasciano fissa una lettera lasciano fisse anche altre lettere, *asistatico* nel caso contrario [4].

Consideriamo ora un gruppo transitivo G_N di sostituzioni su n lettere $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$. Le sue sostituzioni che lasciano fissa una lettera, ad es. ϑ_1, formeranno un sottogruppo Γ_m d'ordine m uguale a $\frac{N}{n}$; inoltre i sottogruppi

(1) Cfr. Weber, opera già citata.

(2) Cfr. L. Bianchi. *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*. Pisa, Spoerri, 1900.

(3) Luigi Fantappiè. *Alcuni teoremi sulle equazioni algebriche.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. XXXI, serie 5ª, 2° sem., ; settembre 1922.

(4) Queste definizioni, come anche alcuni teoremi che seguono (N. 4 e 5), ricordano definizioni e proprietà analoghe dei gruppi continui finiti di trasformazioni. Cfr. L. Bianchi. *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni.* Pisa. Spoerri, 1918, § 70 e 71, pag. 185 e seg.