ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

À l'angle $\psi_j = 2\pi l_j$ associons la $j^{\text{ième}}$ ligne du schème rectangulaire. Ces a_{n_q} qui appartiennent à la ligne en question, peuvent être considérés comme des termes d'une suite du type (5) et donc, d'après le numéro précédent, on peut faire de manière que le point $z = e^{i\psi_j}$ devienne singulier. Or, effectuons cela pour tous les ψ_j. Les points singuliers remplirons alors toute la circonférence du cercle de convergence.

On a ainsi, non seulement le théorème de Fatou-Polya, mais encore un procédé déterminé pour les changements des angles φ_n, resp. des signes des a_n, dans chaque cas particulier.

2. Le théorème II généralise celui de M. Vivanti, mais non celui de M. Dienes. J'énonce encore une généralisation du théorème de M. Dienes:

IV. *Si nous remplaçons, dans l'énoncé II, la condition 2° par la suivante:*

2°′) *pour chaque groupe* $N_q^{\text{ième}}$, *on peut trouver un angle fixe* ψ_q *et un nombre positif* δ_q, *de façon que l'on ait*

$$\cos(\varphi_N - \psi_q) \geqq \delta_q \,, \quad \lim_{q\to\infty} \sqrt[N_q]{\delta_q} = 1 ,$$

pour tous les coefficients $a_N = |a_N|\, e^{i\varphi_N}$ *du groupe, alors le point* $z = 1$ *est singulier.*

La démonstration est analogue à celle du théorème II.

Idromeccanica. — *Sull' influenza della viscosità nei moti piani irrotazionali dei liquidi naturali. - Onde semplici smorzate.* Nota II di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

7. *Moti permanenti.* — Se si tratta di moti permanenti, tanto c quanto w^* non dipendono esplicitamente dal tempo t, per cui la (20) si riduce alla seguente:

$$\frac{c^2}{h}\frac{dW^{*2}}{df^*} - ig\left\{\frac{1}{w^*(f^*+i)} - \frac{1}{w^*(f^*-i)}\right\} = \frac{4\nu c}{h} W^* \frac{d^2W^*}{df^{*2}} + \frac{4\nu c}{h^2}\left(\frac{dW^*}{df^*}\right)^2,$$

essendo ora

$$W^* = \sqrt{w(f^*+i)\cdot w^*(f^*-i)}\,.$$

Esprimendo mediante f e w, per le (17) e la prima delle (19), si ottiene [1]

$$\frac{dW^2}{df} - ig\left\{\frac{1}{w(f+iq)} - \frac{1}{w(f-iq)}\right\} = \frac{4\nu q^2}{h} W \frac{d^2W}{df^2} + 4\nu c\left(\frac{dW}{df}\right)^2, \tag{21}$$

essendo

$$W = \sqrt{w(f+iq)\cdot w(f-iq)}\,.$$

[1] Cfr. loco ultimo citato, pag. 199.

Per i liquidi perfetti ($\nu = 0$), il secondo membro è nullo e la (21) diviene la nota equazione di Levi-Civita [1].

8. *Soluzioni approssimate corrispondenti a onde progressive che vanno smorzandosi.* — Immaginiamo gli assi x, y animati da una traslazione uniforme, orizzontale, nel senso delle x negative e sia c il valore della velocità — *velocità di propagazione* del moto ondoso —. Allora w definisce la velocità relativa, per cui, se si suppone piccola la perturbazione ondosa di fronte alla velocità c, poniamo

$$w = c(1 + e^{-\lambda t}\varepsilon), \tag{21}$$

dove λ rappresenta una costante reale positiva, *a priori* arbitraria.

Risulta da questa che

$$\left| e^{-\lambda t}\varepsilon \right| = \left| \frac{w-c}{c} \right|,$$

rappresenta il valore della velocità assoluta della perturbazione ondosa; per cui, per piccole perturbazioni, ε dovrà trattarsi come quantità di primo ordine.

Per la (18), la (21) può scriversi

$$w^*(t\,;f^*) = 1 + e^{-\lambda t}\varepsilon(f^*).$$

Trattando ε come quantità di primo ordine, per la precedente, la (20) diviene

$$\frac{c^2}{h}\frac{d}{df^*}\left\{\varepsilon(f^*+i)+\varepsilon(f^*-i)\right\}+ig\left\{\varepsilon(f^*+i)-\varepsilon(f^*-i)\right\}=$$
$$=c\lambda\left\{\varepsilon(f^*+i)+\varepsilon(f^*-i)\right\}+\frac{2\nu c}{h^2}\frac{d^2}{df^{*2}}\left\{\varepsilon(f^*+i)+\varepsilon(f^*-i)\right\},$$

la quale, per le (17) e (19), può ridursi alla seguente:

$$\frac{d}{df}\left\{\varepsilon(f+iq)+\varepsilon(f-iq)\right\}+\frac{ig}{c^3}\left\{\varepsilon(f+iq)-\varepsilon(f-iq)\right\}= \tag{22}$$
$$=\frac{\lambda}{c^2}\left\{\varepsilon(f+iq)+\varepsilon(f-iq)\right\}+2\nu\frac{d^2}{df^2}\left\{\varepsilon(f+iq)+\varepsilon(f-iq)\right\}.$$

È questa l'equazione lineare in ε, caratteristica delle soluzioni approssimate, alle quali corrispondono onde che si propagano con velocità di valore c e che vanno smorzandosi con *costante di smorzamento* λ. Per $\lambda = \nu = 0$, la precedente viene a coincidere coll'equazione delle soluzioni approssimate, stabilita da Levi-Civita [2] per le onde progressive permanenti.

(1) *Sulle onde progressive di tipo permanente* [questi Rendiconti, vol. XVI (1907), pag. 783].

(2) Loco citato, pag. 787.

9. *Onde semplici.* — Facilmente si può constatare che

$$\varepsilon(f) = \gamma \cos \frac{2\pi f}{\mu}, \tag{23}$$

è integrale della (22), reale per f reale se γ e μ designano due costanti reali arbitrarie, di cui la prima da trattarsi come quantità di primo ordine; la costante μ risultando legata a c, λ, g dalle seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} c^3 &= \frac{\mu g}{2\pi} \operatorname{Th} \frac{2\pi q}{\mu} \\ \lambda &= \frac{8\pi^2 \nu c^2}{\mu^2}. \end{aligned} \right. \tag{24}$$

Portando nella (21) l'espressione (23) di ε, si ottiene

$$w = c\left(1 + \gamma e^{-\lambda t} \cos \frac{2\pi f}{\mu}\right). \tag{25}$$

Per cui integrando la (16), con questa espressione di w, e assumendo $z = 0$ per $f = 0$, si ottiene

$$cz = f - \frac{2\pi\gamma}{\mu} e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \frac{2\pi f}{\mu}.$$

Risulta, da questa, che f differisce da cz per quantità di primo ordine, per cui la (25) può sostituirsi con la seguente:

$$w = c\left(1 + \gamma e^{-\lambda t} \cos \frac{2\pi c z}{\mu}\right), \tag{25'}$$

mentre dalla precedente stessa si può dedurre, con la solita approssimazione,

$$f = cz + \frac{2\pi\gamma}{\mu} e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \frac{2\pi c z}{\mu}. \tag{26}$$

Tanto dalla (25′) quanto dalla (26) apparisce che la *lunghezza d'onda* è

$$\omega = \frac{\mu}{c}, \tag{27}$$

per cui la (26) può scriversi senz'altro

$$f = cz + \frac{2\pi\gamma}{c\omega} e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{\omega}. \tag{26'}$$

Per la funzione di corrente si ricava da questa

$$\psi = cy + \frac{2\pi\gamma}{c\omega} e^{-\lambda t} \cos \frac{2\pi x}{\omega} \operatorname{Sh} \frac{2\pi y}{\omega},$$

la quale, per $\psi = q = ch$, fornisce la seguente equazione del pelo libero:

$$h = y + \frac{2\pi\gamma}{c^2\omega} e^{-\lambda t} \cos\frac{2\pi x}{\omega} \operatorname{Sh}\frac{2\pi y}{\omega};$$

e siccome y differisce da h per quantità di primo ordine, si può scrivere $\operatorname{Sh}\frac{2\pi h}{\omega}$ al posto di $\operatorname{Sh}\frac{2\pi y}{\omega}$, per cui in definitiva si ottiene

$$y = h - \frac{2\pi\gamma}{c^2\omega} e^{-\lambda t} \operatorname{Sh}\frac{2\pi h}{\omega} \cdot \cos\frac{2\pi x}{\omega}. \tag{28}$$

Per la (27) e per la prima delle (19), le (24) divengono

$$c^2 = \frac{\omega g}{2\pi} \operatorname{Th}\frac{2\pi h}{\omega} \quad , \quad \lambda = \frac{8\pi^2\nu}{\omega^2}.$$

Nella prima di queste riconosciamo la classica relazione che Airy dedusse per le onde semplici di *liquidi perfetti* e che nel caso di un canale molto profondo $\left(h = \infty\right.$, nel qual caso $\left. c^2 = \frac{\omega g}{2\pi}\right)$ recentemente fu dal Levi-Civita [1] riconosciuta sussistere (non solo per onde approssimate, ma altresì) per onde rigorose di altezza finita. Parmi notevole la circostanza che *la relazione di Airy continua a valere anche per le onde semplici di liquidi naturali, cioè viscosi.*

La seconda, delle precedenti relazioni, definisce la *costante di smorzamento* delle onde; come si vede, essa *risulta proporzionale al coefficiente di viscosità e inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza dell'onda.*

Se il liquido è (oppure si può ritenere) perfetto, avendosi $\nu = 0$ e quindi $\lambda = 0$, si ritrovano le onde semplici permanenti [2].

[1] *Risoluzione dell'equazione funzionale che caratterizza le onde periodiche in un canale molto profondo* [Math. Ann., B. 85 (1922), pag. 256–279].

[2] In base alle esperienze di Poiseuille, relative all'acqua, si ha in unità C.G.S. (Brillouin, *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*, première partie, pag. 129)

$$\nu = \frac{0.01779}{1 + 0{,}0336793\,\mathrm{T} + 0{,}0002209936\,\mathrm{T}^2},$$

designando T la temperatura. Per l'acqua salata, la legge di variazione della viscosità col grado di salsedine è alquanto complessa; come norma generale si può asserire che la maggior parte dei sali disciolti nell'acqua aumentano la viscosità del liquido.