ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1923.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sui fondamenti dell'Aritmetica e sul principio dell'invarianza del numero.* Nota del Corrisp. F. ENRIQUES [1].

1. La critica dei fondamenti dell'Aritmetica istituita da H. Grassmann [2], L. Kronecker [3] e H. Helmholtz [4], ritenendo la priorità psicologica del numero ordinale sul cardinale, e cercando quindi di definire questo per mezzo di quello, si è imbattuta nella difficoltà di stabilire che « numerando gli elementi d'una classe finita, in un modo qualsiasi, il numero d'ordine dell'ultimo elemento riesce indipendente dal modo della numerazione, cioè dall'ordine in cui vengono presi gli elementi della classe, che si vogliono contare ». E. Schröder [5] per primo ha formulato esplicitamente questo *principio* che ha denominato *dell' invarianza del numero*; Kronecker lo ha assunto come *postulato* per la classe dei numeri naturali $(1, 2 \ldots n)$; ed Helmholtz ha cercato di *dimostrarlo*, deducendolo dalla possibilità di ottenere una qualsiasi sostituzione sopra n lettere come prodotto di trasposizioni. Ma, a ragione, questa dimostrazione non è ritenuta come soddisfacente.

Tuttavia si può arrivare ad una veduta chiara e precisa intorno al problema sollevato dal principio di Schröder, e fornire una vera dimostrazione di codesto principio, fissando anzitutto i concetti logici di *classe*, *ordine* e

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1923.

(2) Lehrbuch der Arithmetik. Berlino, 1861.

(3) *Ueber der Zahlbegriff*, in: Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller gewidmet (Lipsia, 1887).

(4) Zahlen und Messen, in citati Philosophische Aufsätze.

(5) Lehrbuch der Arithmetik und der Algebra. Lipsia, 1873 (pag. 14).

corrispondenza, che si assumono come presupposti, e che permettono l'introduzione dei numeri ordinali.

Questo è appunto lo scopo della presente Nota. In cui rileveremo anche l'uso implicito che si fa del principio dell'invarianza del numero nelle ordinarie dimostrazioni delle proprietà formali delle operazioni.

2. Conformemente alla veduta generalmente adottata dai critici dell'Aritmetica dopo Cantor e Dedekind, presupponiamo i concetti di *classe* o *gruppo* di oggetti (elementi), di *corrispondenza* e di *ordine*, e i relativi assiomi logici, ormai esaurientemente analizzati. Diciamo che una classe è *ordinata*, se è dato un criterio per cui, presi due elementi qualsiansi di essa, uno di essi *precede* l'altro (e questo all'opposto *segue* quello), per modo che: se A precede B e B precede C, di conseguenza A precede C, e non C ad A.

Un elemento d'una classe ordinata si dirà *primo* (o *ultimo*) se non vi è alcun altro elemento che lo preceda (o risp. lo segua).

Una classe si dirà *perfettamente ordinata* se è ordinata in guisa che « per essa e per ogni classe contenuta in essa *esiste* sempre *un primo* e *un ultimo* elemento ».

Dalla definizione si deduce che « in una classe perfettamente ordinata, ogni elemento che non sia l'ultimo ha un *successivo immediato*, ed ogni elemento, che non sia il primo ha un *precedente immediato* ».

Le classi finite di oggetti che ordiniamo colla numerazione, facendo corrispondere i loro elementi ai numeri $1, 2 \ldots n$, hanno appunto un ordine perfetto. Reciprocamente le classi perfettamente ordinate sono finite [1], e permettono di *definire per astrazione i numeri ordinali*, come segue.

Se C e C′ sono due classi perfettamente ordinate, si può stabilire fra di esse una *corrispondenza ordinata* (cioè tale che ad elementi susseguentisi corrispondano elementi susseguentisi), fissando che si corrispondano i loro primi elementi, e che — essendo A e A′ due elementi corrispondenti — si corrispondano anche *il* successivo di A e *il* successivo di A′. La corrispondenza così stabilita si estende ad una almeno delle due classi nella sua interezza, cioè fa corrispondere biunivocamente a questa una classe (*simile*) contenuta nell'altra: infatti se accade, per esempio, che vi sieno elementi di C′ cui non risponde alcun elemento di C, vi sarà tra questi elementi un primo, diciamo X′; allora al precedente di X′ — diciamo N′ — corrisponderà l'ultimo elemento, N, di C, e la classe C riuscirà simile alla classe degli elementi di C′ che precedono X′, e che ha N′ come ultimo elemento. Se così non fosse, si avrebbe un elemento di C (susseguente ad N) cui risponderebbe in C′ un elemento precedente ad N′.

[1] L'osservazione del fatto resulta implicitamente dall'analisi dei principî dell'Aritmetica di M. Pieri (Bollettino dell'Accademia Gioenia di Catania, 1908): per noi la possibilità dell'ordinamento che abbiamo denominato « perfetto », viene assunta come *definizione* delle classi finite (§ 3).

Ora, la corrispondenza ordinata fra classi perfettamente ordinate, permette di definire in queste gli elementi di *ugual posto*, sotto la condizione che le classi medesime sieno sufficientemente estese, e per esempio nelle classi simili: questa relazione soddisfa invero alle proprietà logiche d'un'uguaglianza e permette quindi di definire « il *numero d'ordine dell'elemento d'una classe* perfettamente ordinata, come *concetto astratto dell'elemento d'ugual posto* nelle classi simili (o in classi più estese) ».

3. *Definiremo* come classe *finita*, ogni classe che può essere perfettamente ordinata. E dimostreremo i seguenti teoremi:

I) *Se una classe è finita* (cioè ammette un ordinamento perfetto), *in qualunque modo vengano ordinati i suoi elementi si avrà sempre un ordinamento perfetto.*

II) *Una classe finita non può porsi in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.*

III) *Se una classe finita viene ordinata in modi diversi, si ottengono sempre classi ordinate simili, in cui gli ultimi elementi sono d'ugual posto*; in altre parole sussiste *il principio dell' invarianza del numero*: il numero d'ordine dell'ultimo elemento per un ordinamento qualsiasi d'una classe finita, è sempre il medesimo.

4. Il teorema I si dimostra come segue.

Sia C una classe perfettamente ordinata e C′ una classe *equivalente* (cioè tale che possa porsi in corrispondenza biunivoca con C) diversamente ordinata. Dimostriamo anzitutto che esiste in C′ un *ultimo* elemento.

A tal uopo si considerino in C quegli elementi, che designeremo genericamente con P, siffatti che: gli elementi precedenti a P nell'ordine di C, abbiano come corrispondenti in C′ elementi precedenti rispetto all'elemento P′, omologo di P.

Almeno il primo elemento di C è un P.

Ora gli elementi P formeranno entro C un gruppo, perfettamente ordinato, $P_1 P_2 \dots P_s$, che avrà un ultimo elemento P_s. Dico che l'elemento P'_s, omologo di P_s in C′, è l'ultimo elemento di C′.

La dimostrazione procede per assurdo, come segue.

Se P'_s non è l'ultimo elemento di C′, agli elementi di C′ che susseguono P'_s rispondono elementi di C, successivi a P_s (altrimenti si contraddirebbe alla proprietà caratteristica dei P), quindi è certo che tra i successivi di P_s in C esistono elementi il cui corrispondente, in C′, succede a P_s: e fra codesti elementi vi sarà un primo X, nell'ordine di C.

Orbene ad X corrisponde in C′ un X′, successivo a P'_s, mentre tutti i precedenti ad X hanno come omologhi elementi di C′ che non seguono P'_s: dunque X gode della proprietà degli elementi P, e però costituisce un elemento di questo gruppo, successivo a P_s: ma questa conclusione è assurda, perchè P_s è, per definizione, l'ultimo dei P.

Nello stesso modo (invertendo gli ordini) si prova che C′ possiede anche un *primo* elemento.

Ora ogni classe K′, contenuta in C′, resulta equivalente ad una classe K contenuta in C, e poichè K possiede un ordine perfetto (subordinato da quello di C) si deduce che anche per K′ vi è un primo e un ultimo elemento. c. Ↄ. Ↄ.

5. Il teorema II si deduce dal teorema I, mediante riduzione all'assurdo, come segue.

Se la classe C è equivalente ad una sua parte propria, C′, si consideri un elemento A appartenente a C e non a C′, e la serie dei suoi corrispondenti A′ A″ ... nella corrispondenza data e nelle sue potenze successive. Questa serie (che Dedekind chiama « una catena ») è illimitata, cioè ordinata in modo da non possedere ultimo elemento: ciò contraddice al teor. I nell'ipotesi che C ammetta un ordinamento perfetto.

6. Ora, finalmente, stabiliamo senza difficoltà il teor. III che costituisce il principio dell'invarianza del numero.

Si confrontino due ordini (perfetti) di una classe finita, e quindi due classi perfettamente ordinate equivalenti, C e C′. Se esse non sono simili, sicchè per esempio C′ si trovi in corrispondenza ordinata con una parte propria K di C (l'ultimo elemento di K, avendo ugual posto dell'ultimo elemento di C′), si deduce che C è equivalente alla sua parte propria K: in contraddizione al teor. II.

7. Rileveremo infine che il principio dell'invarianza del numero, viene implicitamente usato nelle dimostrazioni ordinarie delle proprietà formali delle operazioni, e in ispecie delle *proprietà commutativa* e *distributiva del prodotto*.

Invero si suol dimostrare che

$$ab = ba\,,$$

scrivendo

$$ab = a + a + \ldots + a_b\,,$$
$$a = 1 + 1 + \ldots + 1_a\,,$$
$$b = 1 + 1 + \ldots + 1_b\,,$$
$$\begin{aligned} ab &= (1 + 1 + \ldots + 1_a) + \ldots + (1 + 1 + \ldots + 1_a)_b = \\ &= (1 + 1 + \ldots + 1_b) + \ldots + (1 + 1 + \ldots + 1_b)_a = \\ &= b + b + \ldots + b_a = ba\,. \end{aligned}$$

Ora si può dare forma logica a questa dimostrazione, supponendo che a sia « il numero degli elementi d'una classe finita (A) » e b « il numero degli elementi d'una classe finita (B) ».

La prima classe ammette un ordine (perfetto) $A_1\, A_2 \ldots A_a$, e parimente la seconda ammette un ordine $B_1\, B_2, \ldots B_b$. Il prodotto $a\,b$, che è *per definizione* la somma di b termini uguali ad a, sarà il numero degli elementi della classe formata dalle coppie $A_r B_s$, che si presenta così ordinata:

$$A_1 B_1, A_2 B_1 \ldots A_a B_1 ; A_1 B_2, A_2 B_2 \ldots A_a B_2 ; \ldots ; A_1 B_b, A_2 B_b \ldots A_a B_b ;$$

ma questa stessa classe può essere ordinata anche come segue:

$$A_1 B_1, A_1 B_2 \ldots A_1 B_b ; A_2 B_1, A_2 B_2 \ldots A_2 B_b ; \ldots ; A_a B_1, A_a B_2 \ldots A_a B_b ;$$

ed allora appare che il numero dei suoi elementi vale $b\,a$.

La proprietà distributiva

$$(a+b)\,c = a\,c + b\,c\,,$$

nasce pure dal confrontare due ordini della classe formata colle coppie di elementi presi dalle classi $(A+B)$ e (C), i cui numeri cardinali sono $a+b$ e c, come viene accennato dalla scrittura seguente:

$$A_1 C_1 \ldots A_a C_1, B_1 C_1 \ldots, B_b C_1 ; \ldots ; A_1 C_c \ldots A_a C_c, B_1 C_c \ldots B_b C_c :$$

e

$$A_1 C_1 \ldots A_a C_1, \ldots A_1 C_c \ldots A_a C_c ; B_1 C_1 \ldots B_b C_1, \ldots B_1 C_c \ldots B_b C_c .$$

Fisica. — *I fenomeni delle « stelle variabili » come prova della composizione della velocità della luce con quella della sorgente.* Nota del Corrisp. M. La Rosa [1].

L'estrema concisione che ho dovuto imporre alla mia comunicazione del 1° giugno, la brevità e la rapidità della discussione che la seguì hanno lasciato in alcuni delle incertezze sulla portata della mia ricerca. Di esse si è reso interprete il prof. Castelnuovo, nelle brevi osservazioni fatte nella stessa seduta intorno alla mia Nota [2].

Sento pertanto forte il bisogno di tornare sull'argomento, per fornire alcuni chiarimenti che reputo indispensabili, a fine di orientare bene l'opinione di quei lettori, che non hanno un'adeguata preparazione fisica, specialmente nel campo degli studî spettrali.

La questione che m'interessa di chiarire è quella della convenienza, o meno, di appoggiarsi direttamente sulle misure delle variazioni *delle velocità radiali* — delle componenti di una stella doppia — piuttosto che sulle *variazioni di luce « giacchè queste possono dipendere da svariate cause fisiche a noi parzialmente ignote »*.

In primo luogo mi permetto di notare che oggetto delle mie considerazioni non sono le stelle conosciute in modo certo come « doppie » ma le « stelle variabili », comprese le « nuove » finora osservate.

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1923.

(2) Tanto la mia Nota quanto le osservazioni del prof. Castelnuovo sono comparse nel fasc. 12° del 1° sem. anno corrente.