ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Ancora sull'integrazione dell' equazione differenziale ordinaria, lineare e non lineare, ad indice qualunque.* Nota di Pio Scatizzi, S. I., presentata dal Socio V. Volterra [1].

5. L'equazione (2) ci porta ad un'equazione integrale ben più complicata alla cui soluzione si arriva col metodo delle approssimazioni successive.

Nell'equazione proposta

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \varphi_1(x)\, y^n = \varphi_2(x)$$

operiamo la trasformazione

$$y\,(x) = \frac{u\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[n]{\varphi_1(x)\, x^{m+1}}}$$

per cui diviene

$$\mathrm{D}^m \frac{u\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[n]{\varphi_1(x)\, x^{m+1}}} + \frac{u^n\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{m+1}} = \varphi_2(x)\,.$$

Se applichiamo ora a tutti i suoi termini l'operazione D^{-m}, il segno di derivazione, dal primo termine passa al secondo

$$\frac{u\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[n]{\varphi_1(x)\, x^{m+1}}} + \mathrm{D}^{-m} \frac{u^n\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{m+1}} = \mathrm{D}^{-m}\, \varphi_2\,(x)\,.$$

D'altra parte il significato del secondo membro è dato in modo preciso dalla nota formola

$$\mathrm{D}^{-m}\, \varphi_2(x) = \mathrm{K} \int_0^\infty \varphi_2\,(x+\alpha)\, \alpha^{m-1}\, d\alpha$$

essendo K una costante conosciuta.

Avremo dunque per cose note:

$$\sqrt[n]{\varphi_1(x)\, x^{m+1}}\, \mathrm{D}^{-m}\, \varphi_2(x) = u\left(\frac{1}{x}\right) + \int_0^\infty \frac{\sqrt[n]{\varphi_1\,(x)\, x^{m-1}}\, (1-\theta)^{m-1}\, u^n\left(\frac{\theta}{x}\right) d\theta}{(-1)^m\, \Gamma(m)}$$

[1] Presentata nella seduta del 20 maggio 1923. V. questi Rendiconti, pag. 67.

Chiamando il primo membro con $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$ ed operando nello stesso modo di sopra accennato, si giungerà in ultimo all'equazione

$$\Phi(x) = n(x) + \int_0^{x n} \sqrt{\frac{\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{(n+1)m+1}}} \frac{(x-z)^{m-1}}{(-1)^m \Gamma(m)} u^n(z)\, dz$$

che è del tipo di Lalesco. Noi seguiremo la sua analisi, che si avvicina in tal caso a quella del Picard [1] per il teorema d'esistenza di un'equazione differenziale. Chiameremo per brevità tutto l'integrando del secondo membro con $K(x, z, n)$ e supporremo che risponda alle seguenti condizioni

$$| K[x . z , n] | < M$$

$$| K[x, z, u_\alpha] - K[x, z, u_\beta] | < N(n_\alpha - u_\beta)$$

per

$$0 < z < x < 0$$

$$A - b < n < A + b$$

essendo M, N, a, b, delle costanti positive.

Sia anche

$$A - \varepsilon(h) < \Phi(x) < A + \varepsilon(h)$$

allorchè x varia nell'intervallo 0, h, essendo

$$h > 0$$

Possiamo allora scrivere senz'altro tutto il sistema delle equazioni alle approssimazioni successive

$$u_0(x) = \Phi(x)$$

$$u_1(x) = \Phi(x) + \int_0^w K[x, z, \Phi(z)]\, dz$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n(x) = \Phi(x) + \int_0^x K[x, z, u_{n-1}(z)]\, dz.$$

La soluzione cercata si trae dal $\lim_{n=\infty} u_n(x)$ e varrà nel minimo degli intervalli $(0, a)$, $(0, h)$, essendo

$$\varepsilon(h) + Mh = b;$$

[1] E. Picard, *Analyse*, t. II, p. 340.

e difatti poichè

$$|u_1 - u_0| < \mathrm{M}x$$

$$|u_2 - u_1| < \mathrm{M\,N}\frac{x^2}{1 \cdot 2} \quad \text{ecc.}$$

date le antecedenti condizioni; è chiaro dunque che la serie

$$u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) \ldots + (u_n - u_{n+1}) + \cdots$$

risulterà assolutamente ed uniformemente convergente, onde la soluzione di limite anzidetta.

Matematica. — *Sopra un teorema di Painlevé relativo alle equazioni differenziali a punti critici fissi.* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Corrispondente F. SEVERI [1].

1. Fra le più belle ricerche dell'Analisi moderna sono indubbiamente da annoverarsi quelle del Painlevé sulle equazioni differenziali di 2° ordine, *a punti critici fissi*. Si consideri infatti che il Painlevé, nella sua classica Memoria del tom. 25° (1902) degli *Acta Mathematica*, vincendo gravi difficoltà che avevano inesorabilmente arrestati tutti i suoi predecessori, fra i quali il Picard, riesce finalmente a sceverare e formare esplicitamente (sia pure con qualche lacuna) tutte le equazioni a punti critici fissi del tipo

$$y'' = \mathrm{R}(x\,|\,y\,,y')\,, \tag{1}$$

dove R denota una funzione razionale in y', algebrica in y e soltanto analitica in x.

Le ricerche del Painlevé sono state continuate specialmente per opera dei sigg. Gambier [2], Garnier [3], Chazy [4] e Boutroux P. [5], dei quali: il primo si è principalmente occupato del completamento dei quadri di classificazione di Painlevé, il secondo e il terzo delle equazioni di terz'ordine risolute rispetto ad y''', e l'ultimo finalmente dello studio delle nuove trascendenti definite dalle equazioni trovate da Painlevé. Quanto invece allo studio,

[1] Presentata nella seduta del 20 maggio 1923.

[2] Ved. specialmente Acta Mathematica, t. 33 (1910), pp. 1-55.

[3] Ved. spec. Ann. École Norm. Supérieure, s. 3ª, t. 29 (1912), pp. 1-126, e t. 34 (1917), pp. 239-353.

[4] Ved. spec. Acta Mathematica, t. 34 (1911), pp. 317-385.

[5] Ved. spec. Ann. École Norm. Supérieure, s. 3ª, t. 30 (1913), pp. 255-376, e t. 31 (1914), pp. 99-160.