ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

e difatti poichè

$$|u_1 - u_0| < \mathrm{M}x$$

$$|u_2 - u_1| < \mathrm{M\,N}\frac{x^2}{1\cdot 2} \quad \text{ecc.}$$

date le antecedenti condizioni; è chiaro dunque che la serie

$$u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) \ldots + (u_n - u_{n+1}) + \cdots$$

risulterà assolutamente ed uniformemente convergente, onde la soluzione di limite anzidetta.

Matematica. — *Sopra un teorema di Painlevé relativo alle equazioni differenziali a punti critici fissi.* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Corrispondente F. SEVERI [1].

1. Fra le più belle ricerche dell'Analisi moderna sono indubbiamente da annoverarsi quelle del Painlevé sulle equazioni differenziali di 2° ordine, *a punti critici fissi*. Si consideri infatti che il Painlevé, nella sua classica Memoria del tom. 25° (1902) degli *Acta Mathematica*, vincendo gravi difficoltà che avevano inesorabilmente arrestati tutti i suoi predecessori, fra i quali il Picard, riesce finalmente a sceverare e formare esplicitamente (sia pure con qualche lacuna) tutte le equazioni a punti critici fissi del tipo

$$y'' = \mathrm{R}(x\,|\,y\,,y')\,, \tag{1}$$

dove R denota una funzione razionale in y', algebrica in y e soltanto analitica in x.

Le ricerche del Painlevé sono state continuate specialmente per opera dei sigg. Gambier [2], Garnier [3], Chazy [4] e Boutroux P. [5], dei quali: il primo si è principalmente occupato del completamento dei quadri di classificazione di Painlevé, il secondo e il terzo delle equazioni di terz'ordine risolute rispetto ad y''', e l'ultimo finalmente dello studio delle nuove trascendenti definite dalle equazioni trovate da Painlevé. Quanto invece allo studio,

(1) Presentata nella seduta del 20 maggio 1923.

(2) Ved. specialmente Acta Mathematica, t. 33 (1910), pp. 1-55.

(3) Ved. spec. Ann. École Norm. Supérieure, s. 3ª, t. 29 (1912), pp. 1-126, e t. 34 (1917), pp. 239-353.

(4) Ved. spec. Acta Mathematica, t. 34 (1911), pp. 317-385.

(5) Ved. spec. Ann. École Norm. Supérieure, s. 3ª, t. 30 (1913), pp. 255-376, e t. 31 (1914), pp. 99-160.

forse assai più importante, delle equazioni di 2° ordine *generali*, vale a dire del tipo

$$P(x \mid y, y', y'') = 0, \tag{2}$$

dove P denota un polinomio (irriducibile) in y, y', y'' con coefficienti funzioni analitiche di x; nulla mi risulta essere stato fatto prima delle recentissime e interessanti ricerche di un matematico svedese, il sig. Malmquist (¹), che si è occupato sovratutto della discussione delle eventuali singolarità essenziali *mobili* dell'integrale generale della (2).

Nella surricordata Memoria di Painlevé, sono però enunciati (²), senza dimostrazione, due fondamentali teoremi relativi alle equazioni (2), che l'A. dà come « *très vraisemblables* », aggiungendo poco dopo: « *Ces deux théorèmes sont maintenant démontrés en toute rigueur pour les équations* (2) *du premier degré en* y''. *Il resterait à les demontrer sans se donner le degré de* P *en* y''. *La détermination complète des équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, serait alors bien près d'être achevée* ».

Il Malmquist ha dimostrato una parte del 2° teorema; ma, del 1° teorema e della parte più importante del 2°, non è ancora stata data, che io sappia, alcuna dimostrazione. Nella presenta Nota, e in un'altra che seguirà, mi propongo di dimostrare il primo dei due teoremi in discorso, avvalendomi dei risultati recentemente conseguiti, specie per opera dei matematici italiani, dalla geometria su di una superficie algebrica.

2. Il teorema che forma oggetto del presente lavoro, può enunciarsi brevemente così:

Se l'equazione differenziale di 2° ordine (2) *è a punti critici fissi, la superficie algebrica* σ, *rappresentata dall'equazione* $P = 0$ *allorchè si sostituisce al posto di* x *un valore fisso, generico,* x_0, *e* y, y', y'' *si riguardano come coordinate cartesiane di un punto dello spazio, o è razionale, o è trasformabile birazionalmente in una rigata ellittica* (³).

Per dimostrare il teorema, cominciamo col far vedere in questa Nota che *se un'equazione*

$$Q(x \mid z, z', z'') = 0, \tag{3}$$

del tipo (2), *è a punti critici fissi, la superficie algebrica* σ_1 *rappresentata, in coordinate* (v_1, v_2, v_3), *dall'equazione*

$$Q(x_0 \mid v_1, v_2, v_3) = 0,$$

(¹) Archiv för Matematik, Astr. och Fysik, Bd. 17 (1922), e Rend. del 5° Congresso dei Matematici Scandinavi (Helsingfors, 4-7 luglio 1922), pp. 233-253.

(²) a pag. 67.

(³) Nell'enunciato di Painlevé figura la condizione che, nell'integrale generale della equazione, le due costanti compaiano in modo *essenzialmente trascendente.* Tale restrizione però, come si vedrà nella dimostrazione che segue, non risulta necessaria.

è segata dal piano $v_2 = 0$ in una curva Γ_1 che, se non si spezza, è necessariamente di genere zero od uno.

Infatti, assoggettiamo la superficie σ_1 alla trasformazione birazionale cubica, involutoria

$$v_1 = w_1 \ , \ v_2 = \frac{1}{w_2} \ , \ v_3 = \frac{w_3}{w_2^2} \ , \tag{4}$$

e sia

$$R(x_0 | w_1 , w_2 , w_3) = 0 \tag{5}$$

l'equazione della superficie trasformata σ'_1, s'intende liberata, come di solito, dalle eventuali superficie fondamentali che nascono dalla trasformazione, e quindi irriduttibile. Ciò fatto, ordiniamo il polinomio R secondo le potenze ascendenti di w_2, e sia

$$\begin{aligned} (6) \qquad & f_m(x_0 | w_1 , w_3) + w_2 f_{m-1}(x_0 | w_1 , w_3) + \cdots + \\ & + w_2^{m-1} f_1(x_0 | w_1 , w_3) + w_2^m f_0(x_0) = 0 \, . \end{aligned}$$

dove f_r $(r = 0 , 1 , \ldots , m)$ denota un polinomio di grado r in w_1 e w_3, la forma allora assunta dalla (5). Notiamo subito che il primo termine f_m della (6) — che non può essere identicamente nullo, altrimenti la superficie non sarebbe irriduttibile — uguagliato a zero, fornisce l'equazione dell'intersezione della σ'_1 col piano $w_2 = 0$.

Con le operazioni indicate siamo venuti a porre l'equazione differenziale (3) sotto la forma

$$\begin{aligned} (7) \qquad & f_m\left(x | z , \frac{z''}{z'^2}\right) + \frac{1}{z'} f_{m-1}\left(x | z , \frac{z''}{z'^2}\right) + \cdots + \\ & + \frac{1}{z'^{m-1}} f_1\left(x | z , \frac{z''}{z'^2}\right) + \frac{1}{z'^m} f_0(x) = 0 \, . \end{aligned}$$

Operiamo ora, su questa, la trasformazione classica

$$x = x_0 + \alpha X \ , \ z = Z \, , \tag{8}$$

dove α denota un parametro; otterremo così (tornando a scrivere, dopo eseguita la trasformazione, x e z in luogo di X e Z, come si è soliti fare) l'equazione

$$\begin{aligned} (9) \qquad & f_m\left(x_0 + \alpha x | z , \frac{z''}{z'^2}\right) + \frac{\alpha}{z'} f_{m-1}\left(x_0 + \alpha x | z , \frac{z''}{z'^2}\right) + \cdots + \\ & + \frac{\alpha^{m-1}}{z'^{m-1}} f_1\left(x_0 + \alpha x | z , \frac{z''}{z'^2}\right) + \frac{\alpha^m}{z'^m} f_0(x_0 + \alpha x) = 0 \, , \end{aligned}$$

che per $\alpha = 0$ si riduce semplicemente a

$$f_m\left(x_0 \,|\, z\,,\, \frac{z''}{z'^2}\right) = 0\,. \tag{10}$$

L'equazione (10) si integra immediatamente ponendo

$$\frac{z''}{z'^2} = \frac{d}{dz} \lg z' = t\,;$$

precisamente in tal guisa si ottiene l'integrale generale sotto la forma

$$z = \varphi[c_1(x - c_2)]\,, \tag{11}$$

dove c_1 e c_2 denotano due costanti arbitrarie e φ la funzione ottenuta invertendo l'integrale

$$\int^z e^{-\int^z t\,dz}\,dz\,, \tag{12}$$

dove, in luogo di t, deve pensarsi sostituita la sua espressione in funzione di z, tratta dall'equazione

$$f_m(x_0 \,|\, z\,,\, t) = 0\,. \tag{13}$$

Ciò posto, avvaliamoci del lemma fondamentale su cui è imperniata la prima parte del metodo escogitato da Painlevé [1] per lo studio delle equazioni del tipo (1). In virtù di tale lemma, affinchè l'equazione (3) possa essere a punti critici fissi, è *necessario* che tale sia pure la (10); cioè che questa sia ad integrale generale *uniforme*, perchè, considerato il modo con cui le costanti arbitrarie entrano nel secondo membro della (11), non è possibile che l'integrale in discorso sia a punti critici fissi senza essere uniforme. Ma Picard [2] ha dimostrato che, affinchè l'inversione di un integrale del tipo (12) possa dar luogo ad una funzione uniforme, occorre che la curva algebrica (supposta irriduttibile) rappresentata dall'equazione (13) sia di genere zero od uno; dunque *se l'equazione* (2) *è a punti critici fissi, la superficie* σ'_1 *è segata dal piano* $w_2 = 0$ *in una curva che, se non si spezza, è necessariamente di genere zero od uno.*

Finalmente si consideri che la trasformazione (4), come si vede subito ricorrendo a coordinate omogenee, fa corrispondere fra loro, prescindendo dalle superficie fondamentali, i piani $v_2 = 0$ e $w_2 = 0$. Ne segue che la curva d'intersezione della superficie σ'_1 col piano $w_2 = 0$ è omologa della curva Γ_1 di cui si parla nell'enunciato, e quindi anche questa è di genere zero od uno. c. d. d.

(1) Bulletin de la Société Math. de France, t. 28 (1900), pp. 208-209.

(2) *Traité d'Analyse*, 2e éd., t. III, pag. 68.