ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Matematica. — *Alcune proprietà delle equazioni normali di grado primo.* Nota di PACIFICO MAZZONI, presentata dal Socio G. A. MAGGI (1).

1 Di tali equazioni esponiamo alcune proprietà complementari a quelle note della teoria di Galois. Consideriamo un'equazione di grado primo p:

$$(1) \qquad f(x) = (x - \alpha_1) \,.\, (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_p) = 0\,,$$

a coefficienti razionali, normale e irriducibile nel campo assoluto $[1]$ di razionalità (2). Il suo gruppo di Galois, di ordine p, è ciclico, e non si abbassa, per l'aggiunta a $[1]$ della radice dell'unità

$$\varepsilon_p = e^{2\pi i/p} = \varepsilon\,,$$

perchè i due corpi normali $[\alpha_1]$ e $[\varepsilon]$, avendo i gradi p e $p-1$ primi tra loro, hanno per massimo corpo comune $[1]$. L'equazione (1) si risolverà, estraendo un radicale d'indice p da un elemento $B(\varepsilon) = B$ di $[\varepsilon]$, vale a dire che α_1 si esprimerà razionalmente per $\sqrt[p]{B(\varepsilon)}$, con coefficienti di $[\varepsilon]$. Dimostriamo che:

Se la (1) *è normale, il corpo* $[\alpha_1\,, \varepsilon]$ *è normale, di grado* $p \,.\, (p-1)$, *a gruppo ciclico, e coincide col corpo* $[\sqrt[p]{B(\varepsilon)}]$, *essendo* $B(\varepsilon)$ *un certo elemento primitivo di* $[\varepsilon]$.

Anzitutto vediamo che il prodotto $[\alpha_1\,; \varepsilon]$ coincide con l'altro $[\varepsilon\,; \sqrt[p]{B}]$. Infatti α_1 è contenuto in $[\varepsilon\,; \sqrt[p]{B}]$, e perciò il primo corpo è contenuto nel secondo. Ma essendo, com'è noto:

$$\sqrt[p]{B} = \alpha_1 + \varepsilon\,\alpha_2 + \varepsilon^2\,\alpha_3 + \ldots + \alpha_p\,\varepsilon^{p-1}\,,$$

anche $\sqrt[p]{B}$ è contenuto nel primo corpo; e dunque $[\alpha_1\,; \varepsilon] = [\varepsilon\,; \sqrt[p]{B}]$.

Questo corpo $[\alpha_1\,, \varepsilon]$, come prodotto diretto di due corpi normali, ciclici, e di gradi primi tra loro, sarà pure normale e abeliano, anzi ciclico, di grado $p(p-1)$. Segue che ogni suo sottocorpo è pure normale (e ciclico): in particolare lo è $[\sqrt[p]{B}]$, il quale corpo deve perciò coincidere col suo coniugato $[\varepsilon \,.\, \sqrt[p]{B}]$(3). Dunque $[\sqrt[p]{B}]$ contiene ε e perciò coincide con $[\varepsilon\,; \sqrt[p]{B}] = [\alpha_1\,, \varepsilon]$.

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1923.

(2) Solo per semplicità prendiamo un tale campo fondamentale di razionalità. Si potrebbe prendere un corpo qualunque.

(3) Evidentemente $[\sqrt[p]{B}]$ non può essere di grado 1 rispetto a $[1]$; è invece di grado p.

Segue infine che $[B(\varepsilon)]$ ha il grado $p-1$, e coincide con $[\varepsilon]$, cioè che $B(\varepsilon)$ è un elemento primitivo di $[\varepsilon]$. C. d. d.

2. Il corpo $[\sqrt[p]{B}]$, a gruppo ciclico G, ammette un solo sottocorpo di grado p, che è quello dato $[\alpha_1]$; un solo sottocorpo di grado $p-1$, che è $[\varepsilon]$; e infine sottocorpi della forma $[\eta]$ e della forma $[\alpha_1, \eta]$, essendo $[\eta]$ un sottocorpo qualunque di $[\varepsilon]$: e questi sono i soli sottocorpi di $[\sqrt[p]{B}]$.

Le coniugate di $\sqrt[p]{B}$ *rispetto a* $[1]$ *sono le* $p(p-1)$ *grandezze*:

$$\varepsilon^k \sqrt[p]{B(\varepsilon^r)} \quad (r = 1, 2, \ldots, p-1;\ k = 1, 2, \ldots, p).$$

Ora cerchiamo le sostituzioni generatrici dei sottogruppi numerici H e $\boldsymbol{\Gamma}$ dei due corpi $[\varepsilon]$ e $[\alpha_1]$. Anzitutto osserviamo in generale che se una sostituzione di G porta $\sqrt[p]{B(\varepsilon)}$ in $\sqrt[p]{B(\varepsilon^r)}$, essa porterà $B(\varepsilon)$ in $B(\varepsilon^r)$, e quindi porterà ε in ε^r; e viceversa. Sicchè quella sostituzione S di G la quale porta $\sqrt[p]{B(\varepsilon)}$ in $\varepsilon . \sqrt[p]{B(\varepsilon)}$ lascierà ferma ε, e porterà $\varepsilon . \sqrt[p]{B}$ in $\varepsilon^2 . \sqrt[p]{B}$, questa in $\varepsilon^3 . \sqrt[p]{B}$, ecc., e infine $\varepsilon^{p-1} . \sqrt[p]{B}$ in $\sqrt[p]{B}$. E dall'essere G abeliano, risulta subito che la S porta $\sqrt[p]{B(\varepsilon^r)}$ in $\varepsilon^r . \sqrt[p]{B(\varepsilon^r)}$ (1). Dunque:

Quella sostituzione (unica) di G *che porta* $\sqrt[p]{B}$ *in* $\varepsilon . \sqrt[p]{B}$, *è di periodo* p, *e genera, con le sue potenze, il sottogruppo numerico* H *di* $[\varepsilon]$. *I suoi cicli sono*:

$$S = \{\sqrt[p]{B};\ \varepsilon \sqrt[p]{B};\ \varepsilon^2 \sqrt[p]{B}; \ldots; \varepsilon^{p-1} . \sqrt[p]{B}\} \ldots \{\sqrt[p]{B(\varepsilon^r)};\ \varepsilon^r . \sqrt[p]{B(\varepsilon^r)};\ \varepsilon^{2r} . \sqrt[p]{B(\varepsilon^r)}; \ldots\} \ldots$$

Ora consideriamo il sottogruppo numerico $\boldsymbol{\Gamma}$ di $[\alpha_1]$, e prendiamone una sostituzione T di periodo $p-1$; la T porterà $\sqrt[p]{B}$ in una coniugata $\varepsilon^k . \sqrt[p]{B(\varepsilon^x)}$, e sarà $\varepsilon^x \neq \varepsilon$. Possiamo dire, indicando con $\sqrt[p]{B(\varepsilon^x)}$ una opportuna determinazione del radicale, che la T porta $\sqrt[p]{B(\varepsilon)}$ in $\sqrt[p]{B(\varepsilon^x)}$. Allora, prendendo opportunamente le determinazioni dei radicali, si ha che la T porta $\sqrt[p]{B(\varepsilon^x)}$ in $\sqrt[p]{B(\varepsilon^{x^2})}$, questa in $\sqrt[p]{B(\varepsilon^{x^3})}$, ecc.; e siccome T ha il periodo $p-1$, essa riporterà $\sqrt[p]{B(\varepsilon^{x^{p-2}})}$ in $\sqrt[p]{B(\varepsilon)}$. Le potenze $\varepsilon, \varepsilon^x, \varepsilon^{x^2}, \ldots, \varepsilon^{x^{p-2}}$ saranno tutte distinte, e perciò x sarà una radice primitiva rispetto al modulo p. Infine T porterà $\varepsilon^k . \sqrt[p]{B(\varepsilon)}$ in $\varepsilon^{kx} . \sqrt[p]{B(\varepsilon^x)}$. Dunque:

Una sostituzione generatrice T *del sottogruppo numerico* $\boldsymbol{\Gamma}$ *di* $[\alpha_1]$ *porta* ε *in* ε^x, *essendo* x *una radice primitiva rispetto al modulo* p, *e* T *è della forma*:

$$T = \{\sqrt[p]{B(\varepsilon)};\ \sqrt[p]{B(\varepsilon^x)};\ \sqrt[p]{B(\varepsilon^{x^2})}; \ldots; \sqrt[p]{B(\varepsilon^{x^{p-2}})}\} \ldots \{\varepsilon^k . \sqrt[p]{B(\varepsilon)};$$
$$\varepsilon^{kx} . \sqrt[p]{B(\varepsilon^{x^2})};\ \varepsilon^{kx^2} . \sqrt[p]{B(\varepsilon^{x^3})}; \ldots\} \ldots$$

(1) Infatti se g porta $\sqrt[p]{B(\varepsilon)}$ in $\sqrt[p]{B(\varepsilon^r)}$, la $g^{-1} . S . g = S$ porterà $\sqrt[p]{B(\varepsilon^r)}$ in $\varepsilon^r . \sqrt[p]{B(\varepsilon^r)}$.

È evidente che Γ è identico al gruppo di Galois del corpo $[\varepsilon]$; *che le coniugate di* $\sqrt[n]{B(\varepsilon)}$ *rispetto a* $[\varepsilon]$ *sono*:

$$\sqrt[n]{B}\,;\ \varepsilon\,.\sqrt[n]{B}\,;\ \varepsilon^2\sqrt[n]{B}\,;\ldots;\ \varepsilon^{p-1}\sqrt[n]{B}\,,$$

mentre le sue coniugate rispetto a $[\alpha_1]$ *sono*:

$$\sqrt[n]{B(\varepsilon)}\,;\ \sqrt[n]{B(\varepsilon^{\alpha})}\,;\ \sqrt[n]{B(\varepsilon^{\alpha^2})}\,;\ldots;\ \sqrt[n]{B(\varepsilon^{p^{x-2}})}\,,$$

le quali coincidono, in altro ordine, con le grandezze:

$$(2)\qquad \sqrt[n]{B(\varepsilon)}\,;\ \sqrt[n]{B(\varepsilon^2)}\,;\ \sqrt[n]{B(\varepsilon^3)}\,;\ldots;\ \sqrt[n]{B(\varepsilon^{p-1})}\,.$$

3. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'elemento primitivo* $B(\varepsilon)$ *del corpo* $[\varepsilon_p]$ *dia origine a un corpo* $[\sqrt[n]{B(\varepsilon)}]$ *normale e ciclico di ordine* $p(p-1)$, *e quindi contenga un corpo normale di grado primo, è che ogni radicale del tipo* $\sqrt[n]{B(\varepsilon^k)}$ *sia della forma* $\varphi(\varepsilon)\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon)}^k$, *essendo* $\varphi(\varepsilon)$ *un elemento di* $[\varepsilon]$.

Infatti se $[\sqrt[n]{B(\varepsilon)}]$ è ciclico di grado $p(p-1)$, allora il quoziente di $\sqrt[n]{B(\varepsilon^k)}$ per $\sqrt[n]{B(\varepsilon)}^k$ è lasciato invariato dalla sostituzione S, e quindi esso è un elemento $\varphi(\varepsilon)$ di $[\varepsilon]$. C. d. d. E facilmente si vede che la condizione è sufficiente.

Come corollario risulta che il *prodotto*

$$\sqrt[n]{B(\varepsilon)}\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon^2)}\ldots\sqrt[n]{B(\varepsilon^{p-1})}$$

è un numero razionale.

Infatti esso è della forma

$$\sqrt[n]{B(\varepsilon)}\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon)}^2\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon)}^3\ldots\sqrt[n]{B(\varepsilon)}^{p-1}\,.\,\varphi_1(\varepsilon)=B(\varepsilon)^{\frac{p-1}{2}}\,.\,\varphi_1(\varepsilon)\,,$$

ed è anche un elemento di $[\alpha_1]$; e dunque esso è un numero razionale, poichè i 2 corpi $[\varepsilon]$ e $[\alpha_1]$ non hanno elementi comuni, fuori di $[1]$. C. d. d.

In generale, sempre se $[\sqrt[n]{B(\varepsilon)}]$ è ciclico, *i soli elementi della forma* $\sqrt[n]{A(\varepsilon)}$ *che sieno contenuti nel corpo* $[\sqrt[n]{B}]$ *sono quelli del tipo* $\sqrt[n]{A(\varepsilon)} = \varphi(\varepsilon)\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon)}^k$.

Infatti la S porterà $\sqrt[n]{A(\varepsilon)}$ in una certa $\varepsilon^k\,.\sqrt[n]{A(\varepsilon)}$; allora la S lascierà fermo l'elemento

$$\sqrt[n]{A(\varepsilon)} : \sqrt[n]{B(\varepsilon)}^k = \varepsilon^k\,.\sqrt[n]{A(\varepsilon)} : \varepsilon^k\sqrt[n]{B(\varepsilon)}^k\,.$$

e dunque questo elemento è $=\varphi(\varepsilon)$. C. d. d.

4. *La somma delle quantità coniugate* (2) *è un elemento primitivo di* $[\alpha_1]$.

Posto infatti $\xi_1 = \sqrt[p]{B(\varepsilon)} + \sqrt[p]{B(\varepsilon^2)} + \sqrt[p]{B(\varepsilon^3)} + \dots + \sqrt[p]{B(\varepsilon^{p-1})}$, dalle successive potenze della sostituzione S quest'elemento viene portato nelle p grandezze:

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_1 = \sqrt[p]{B(\varepsilon)} + \sqrt[p]{B(\varepsilon^2)} + \sqrt[p]{B(\varepsilon^3)} + \dots + \sqrt[p]{B(\varepsilon^{p-1})}\,; \\ \xi_2 = \varepsilon \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon)} + \varepsilon^2 \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon^2)} + \varepsilon^3 \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon^3)} + \dots + \varepsilon^{p-1} \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon^{p-1})}\,; \\ \xi_3 = \varepsilon^2 \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon)} + \varepsilon^4 \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon^2)} + \varepsilon^6 \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon^3)} + \dots + \varepsilon^{2(p-1)} \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon^{p-1})}\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_p = \varepsilon^{(p-1)} \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon)} + \varepsilon^{2(p-1)} \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon^2)} + \varepsilon^{3(p-1)} \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon^3)} + \dots\,; \end{cases}$$

le quali sono le p coniugate di ξ_1 rispetto a $[1]$. Per dimostrare che $[\xi_1]$ coincide con $[\alpha_1]$, basta far vedere che $\sqrt[p]{B(\varepsilon)}$ appartiene al corpo $[\xi_1\,;\,\varepsilon]$. Ed infatti è:

$$p \,.\, \sqrt[p]{B(\varepsilon)} = \xi_1 + \varepsilon^{-1}\,\xi_2 + \varepsilon^{-2}\,\xi_3 + \dots + \varepsilon^{-(p-1)} \,.\, \xi_p\,. \qquad \text{C. d. d.}$$

Matematica. — *Sopra alcuni sviluppi in serie di funzioni fondamentali.* Nota di CARLO SEVERINI, presentata dal Corrispondente GINO LORIA (1).

In questa ed in altre Note successive mi occuperò degli sviluppi in serie di funzioni fondamentali, che soddisfano ad equazioni della forma:

$$(1)\qquad U_k''(x) + [\lambda_k\, p(x) - q(x)]\, U_k(x) = 0 \qquad (k = 0\,,1\,,2\,,\dots),$$

ed a condizioni ai limiti, espresse da relazioni del tipo:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1\, U_k(a) + a_2\, U_k'(a) + a_3\, U_k(b) + a_4\, U_k'(b) = 0 \\ b_1\, U_k(a) + b_2\, U_k'(a) + b_3\, U_k(b) + b_4\, U_k'(b) = 0 \end{cases} \qquad (k = 0\,,1\,,2\,,\dots),$$

ove $p(x)$ e $q(x)$ sono due funzioni note, continue, di cui la prima è anche maggiore di zero in ogni punto di $(a\,,b)$; λ_k è un parametro indeterminato, ed $a_s\,,\,b_s$ $(s = 1\,,2\,,3\,,4)$ sono costanti assegnate, per le quali si ha:

$$(3)\qquad a_1\, b_2 - a_2\, b_1 = a_3\, b_4 - a_4\, b_3\,.$$

1. Siano, disposti per moduli non decrescenti:

$$(4)\qquad \Lambda_k \qquad (k = 0\,,1\,,2\,,\dots)$$

i valori reali, non nulli, di λ_k (*numeri caratteristici*), per ciascuno dei quali

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1923.