ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Posto infatti $\xi_1 = \sqrt[n]{B(\varepsilon)} + \sqrt[n]{B(\varepsilon^2)} + \sqrt[n]{B(\varepsilon^3)} + \dots + \sqrt[n]{B(\varepsilon^{p-1})}$, dalle successive potenze della sostituzione S quest'elemento viene portato nelle p grandezze:

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_1 = \sqrt[n]{B(\varepsilon)} + \sqrt[n]{B(\varepsilon^2)} + \sqrt[n]{B(\varepsilon^3)} + \dots + \sqrt[n]{B(\varepsilon^{p-1})}\,; \\ \xi_2 = \varepsilon\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon)} + \varepsilon^2\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon^2)} + \varepsilon^3\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon^3)} + \dots + \varepsilon^{p-1}\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon^{p-1})}\,; \\ \xi_3 = \varepsilon^2\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon)} + \varepsilon^4\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon^2)} + \varepsilon^6\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon^3)} + \dots + \varepsilon^{2(p-1)}\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon^{p-1})}\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_p = \varepsilon^{(p-1)}\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon)} + \varepsilon^{2(p-1)}\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon^2)} + \varepsilon^{3(p-1)}\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon^3)} + \dots\,; \end{cases}$$

le quali sono le p coniugate di ξ_1 rispetto a $[1]$. Per dimostrare che $[\xi_1]$ coincide con $[\alpha_1]$, basta far vedere che $\sqrt[n]{B(\varepsilon)}$ appartiene al corpo $[\xi_1\,;\,\varepsilon]$.

Ed infatti è:

$$p\,.\sqrt[n]{B(\varepsilon)} = \xi_1 + \varepsilon^{-1}\,\xi_2 + \varepsilon^{-2}\,\xi_3 + \dots + \varepsilon^{-(p-1)}\,.\,\xi_p\,. \qquad \text{C. d. d.}$$

Matematica. — *Sopra alcuni sviluppi in serie di funzioni fondamentali.* Nota di CARLO SEVERINI, presentata dal Corrispondente GINO LORIA [1].

In questa ed in altre Note successive mi occuperò degli sviluppi in serie di funzioni fondamentali, che soddisfano ad equazioni della forma:

$$(1)\qquad U''_k(x) + [\lambda_k\,p(x) - q(x)]\,U_k(x) = 0 \qquad (k = 0\,,1\,,2\,,\dots),$$

ed a condizioni ai limiti, espresse da relazioni del tipo:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1\,U_k(a) + a_2\,U'_k(a) + a_3\,U_k(b) + a_4\,U'_k(b) = 0 \\ b_1\,U_k(a) + b_2\,U'_k(a) + b_3\,U_k(b) + b_4\,U'_k(b) = 0 \end{cases} \qquad (k = 0\,,1\,,2\,,\dots),$$

ove $p(x)$ e $q(x)$ sono due funzioni note, continue, di cui la prima è anche maggiore di zero in ogni punto di $(a\,,b)$; λ_k è un parametro indeterminato, ed $a_s\,,b_s$ $(s = 1\,,2\,,3\,,4)$ sono costanti assegnate, per le quali si ha:

$$(3)\qquad a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = a_3\,b_4 - a_4\,b_3\,.$$

1. Siano, disposti per moduli non decrescenti:

$$(4)\qquad A_k \qquad (k = 0\,,1\,,2\,,\dots)$$

i valori reali, non nulli, di λ_k (*numeri caratteristici*), per ciascuno dei quali

[1] Presentata nella seduta del 1° giugno 1923.

l'equazione (1) ammette uno o più integrali, in numero finito, linearmente indipendenti (*funzioni fondamentali*), che soddisfano alle (2); intendendosi ogni numero caratteristico ripetuto tante volte nella (4) quante sono le funzioni fondamentali, linearmente indipendenti, ad esso relative; e sia:

$$W_k(x) \qquad (k=0\,,1\,,2\,,\ldots) \tag{5}$$

una corrispondente successione completa di queste funzioni, ortogonali e normali rispetto alla funzione caratteristica $p(x)$, tali cioè da avere:

$$\int_a^b p(x)\, W_h(x)\, W_k(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ se } h \neq k \\ 1 \text{ » } h = k \end{cases} \text{ [1]}. \tag{6}$$

Mi propongo [2] di dimostrare che *la serie*

$$\sum_0^\infty{}_k\, B_k\, W_k(x) \quad , \quad B_k = \int_a^b p(x)\, f(x)\, W_k(x)\, dx\,, \tag{7}$$

ove $f(x)$ è una funzione qualsivoglia, sommabile insieme col suo quadrato nell'intervallo $(a\,,b)$, ivi converge uniformemente, se:

$$\lim_{n=\infty} \left[\left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, B_k^2 \right) \left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, \mathcal{A}_k\, B_k^2 \right) \right] = 0\,; \tag{8}$$

in particolare se, qualunque sia n:

$$\left| \sum_0^n{}_k\, \mathcal{A}_k\, B_k^2 \right| \leqq C \qquad (C \text{ costante}). \tag{9}$$

2. Il teorema in discorso si deduce da un teorema generale dimostrato in una mia precedente Nota [3], dal quale segue che *la serie* (7) *converge uniformemente nell'intervallo $(a\,,b)$, se:*

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, B_k^2 \right) \cdot \int_a^b \left[\sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, B_k\, W'_k(x) \right]^2 dx \right\} = 0\,,$$

in particolare se, qualunque siano n e p:

$$\int_a^b \left[\sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, B_k\, W'_k(x) \right]^2 dx \leqq C \qquad (C \text{ costante}).$$

(1) Cfr. W. Stekloff, *Sur certaines questions d'Analyse. qui se rattachent à plusieurs problèmes de la Physique Mathématique* [Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, VIII^e série, classe physico-mathématique, vol. XXXI, n. 7 (1913)].

(2) Cfr. C. Severini, *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali* [Atti dell'Accademia Gioenia di Catania, serie V, vol. III (1910)]; Stekloff, l. cit., chap. II, n. 11.

(3) Cfr. Severini, *Sulle successioni di funzioni assolutamente continue, convergenti in media* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXXI, serie 5ª (1922)].

Posto perciò:

(10) $$R_{n,p}(x) = \sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, B_k\, W_k(x)\,,$$

si consideri l'integrale

(11) $$I_{n,p} = \int_a^b [R'_{n,p}(x)]^2\, dx\,,$$

ossia

(11)^{bis} $$I_{n,p} = \sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, B_k \int_a^b R'_{n,p}(x)\, W'_k(x)\, dx\,.$$

Integrando per parti si ha:

$$\int_a^b R'_{n,p}(x)\, W'_k(x)\, dx = R_{n,p}(b)\, W'_k(b) - R_{n,p}(a)\, W'_k(a) - \int_a^b R_{n,p}(x) \cdot W''_k(x)\, dx\,,$$

e poichè:

$$W''_k(x) = -[\mathcal{A}_k\, p(x) - q(x)]\, W_k(x) \quad (k = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)\,,$$

se ne deduce:

$$\int_a^b R'_{n,p}(x)\, W'_k(x)\, dx =$$

$$= R_{n,p}(b)\, W'_k(b) - R_{n,p}(a)\, W'_k(a) + \mathcal{A}_k\, B_k - \int_a^b q(x)\, R_{n,p}(x)\, W_k(x)\, dx\,.$$

Risulta in fine, ponendo:

(12) $$C^{(k)}_{n,p} = \int_a^b q(x)\, R_{n,p}(x)\, W_k(x)\, dx\,,$$

e sostituendo nella (11bis):

(13) $$I_{n,p} = R_{n,p}(b)\, R'_{n,p}(b) - R_{n,p}(a)\, R'_{n,p}(a) + \sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, \mathcal{A}_k\, B_k^2 - \sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, B_k\, C^{(k)}_{n,p}\,.$$

3. Si consideri l'ultimo termine della (13). Si ha:

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, B_k\, C^{(k)}_{n,p} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, B_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{n+1}^{n+p}{}_k \left(C^{(k)}_{n,p} \right)^2,$$

e, per la *disuguaglianza di Bessel*:

(14) $$\left| \sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, B_k\, C^{(k)}_{n,p} \right| \leq \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n+1}^{n+p}{}_k \left(C^{(k)}_{n,p} \right)^2,$$

ove si è posto:

(15) $$\int_a^b p(x)\, [f(x)]^2\, dx = M.$$

D'altra parte, per la (12), a causa ancora della *disuguaglianza di Bessel*, risulta:

$$\sum_{n+1}^{n+p}{}_k\,(C_{n,p}^{(k)})^2 \leq \int_a^b p(x)\left[\frac{q(x)\,R_{n,p}(x)}{p(x)}\right]^2 dx\,, \tag{16}$$

e, successivamente:

$$\sum_{n+1}^{n+p}{}_k\,(C_{n,p}^{(k)})^2 \leq M\,.\,N\,, \tag{17}$$

ove N indica il massimo della funzione $\left[\dfrac{q(x)}{p(x)}\right]^2$ nell'intervallo $(a\,,\,b)$.

Dalle (14), (15), (17) si trae così, per ogni n e p:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}{}_k\,B_k\,C_{n,p}^{(k)}\right| \leq \frac{M(N+1)}{2}\,. \tag{18}$$

Matematica. — *Ancora sopra un teorema di Painlevé relativo alle equazioni differenziali a punti critici fissi* [1]. Nota di Francesco Tricomi, presentata dal Corrispondente F. Severi [2].

3. Acquisito che la curva d'intersezione Γ_1 della superficie σ_1 col piano $v_2=0$, se non si spezza, è necessariamente di genere zero od uno, si perviene agevolmente al teorema di Painlevé. All'uopo poniamo nella (2)

$$y=\frac{z-cx}{a(x-x_0)+b}\,, \tag{14}$$

da cui segue

$$z=[a(x-x_0)+b]\,y+cx\,, \tag{15}$$

essendo a, b e c tre costanti qualsiasi. La (2) si muterà allora in un'altra equazione dello stesso tipo, ma in z, che potremo supporre sia la (3), e le due equazioni o saranno entrambe a punti critici fissi, o entrambe non lo saranno.

Per determinare le relazioni intercedenti fra le due funzioni P e Q, basterà derivare due volte la (15); si ottengono così le formule

$$\begin{cases} z'=[a(x-x_0)+b]\,y'+ay+c \\ z''=[a(x-x_0)+b]\,y''+2ay'\,, \end{cases} \tag{16}$$

(1) Vedasi la Nota precedente in questi stessi Rendiconti, a pag. 138. La numerazione dei paragrafi e delle formule è in continuazione di quella di detta Nota.

(2) Presentata nella seduta del 1° giugno 1922.