ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

D'altra parte, per la (12), a causa ancora della *disuguaglianza di Bessel*, risulta:

$$\sum_{n+1}^{n+p}{}_k \left(C_{n,p}^{(k)}\right)^2 \leqq \int_a^b p(x) \left[\frac{q(x)\, R_{n,p}(x)}{p(x)}\right]^2 dx, \tag{16}$$

e, successivamente:

$$\sum_{n+1}^{n+p}{}_k \left(C_{n,p}^{(k)}\right)^2 \leqq M \cdot N, \tag{17}$$

ove N indica il massimo della funzione $\left[\frac{q(x)}{p(x)}\right]^2$ nell'intervallo (a, b).

Dalle (14), (15), (17) si trae così, per ogni n e p:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}{}_k B_k C_{n,p}^{(k)}\right| \leqq \frac{M(N+1)}{2}. \tag{18}$$

Matematica. — *Ancora sopra un teorema di Painlevé relativo alle equazioni differenziali a punti critici fissi* (¹). Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Corrispondente F. SEVERI (²).

3. Acquisito che la curva d'intersezione Γ_1 della superficie σ_1 col piano $v_2 = 0$, se non si spezza, è necessariamente di genere zero od uno, si perviene agevolmente al teorema di Painlevé. All'uopo poniamo nella (2)

$$y = \frac{z - cx}{a(x - x_0) + b}, \tag{14}$$

da cui segue

$$z = [a(x - x_0) + b]\, y + cx, \tag{15}$$

essendo a, b e c tre costanti qualsiasi. La (2) si muterà allora in un'altra equazione dello stesso tipo, ma in z, che potremo supporre sia la (3), e le due equazioni o saranno entrambe a punti critici fissi, o entrambe non lo saranno.

Per determinare le relazioni intercedenti fra le due funzioni P e Q, basterà derivare due volte la (15); si ottengono così le formule

$$\begin{cases} z' = [a(x - x_0) + b]\, y' + ay + c \\ z'' = [a(x - x_0) + b]\, y'' + 2ay', \end{cases} \tag{16}$$

(¹) Vedasi la Nota precedente in questi stessi Rendiconti, a pag. 138. La numerazione dei paragrafi e delle formule è in continuazione di quella di detta Nota.

(²) Presentata nella seduta del 1° giugno 1922.

che, unitamente alle (15), mostrano come, in particolare, i due polinomî

(17) $$\mathrm{P}(x_0|y, y', y'') \quad \text{e} \quad \mathrm{Q}(x_0|z, z', z''),$$

sono tali che il secondo può pensarsi ottenuto dal primo, ponendo

(18) $$z = by + cx_0 \,,\; z' = by' + ay + c \,,\; z'' = by'' + 2a\,y' \,.$$

In altri termini: *le due superficie σ e σ_1, rappresentate rispettivamente in coordinate (u_1, u_2, u_3) e (v_1, v_2, v_3) dalle equazioni*

$$\mathrm{P}(x_0|u_1, u_2, u_3) = 0 \quad , \quad \mathrm{Q}(x_0|v_1, v_2, v_3) = 0 ,$$

sono omologhe nell'omografia Ω rappresentata dalle formule

(19) $$v_1 = bu_1 + cx_0 \,,\; v_2 = au_1 + bu_2 + c \,,\; v_3 = 2a\,u_2 + bu_3 \,.$$

Ciò posto, consideriamo sulla superficie σ il sistema lineare ∞^2 Σ costituito dalle intersezioni di detta superficie coi piani (paralleli all'asse u_3) rappresentati dall'equazione

(20) $$a\,u_1 + b\,u_2 + c = 0$$

al variare delle costanti a, b e c. Eccepito il caso in cui σ sia un cilindro colle generatrici parallele all'asse u_3 (1), tale sistema dovrà necessariamente essere costituito di curve irriduttibili, perchè, pel teorema di Kronecker-Castelnuovo (2), le sole superficie irriduttibili dotate di un sistema ∞^2 di sezioni piane riduttibili, sono le rigate e la superficie di Steiner; e, in entrambi questi casi, i piani determinanti le sezioni in discorso costituiscono l'inviluppo dei piani tangenti alla superficie.

Osserviamo ulteriormente che, in virtù delle (19), il piano (20) ha per omologo, nell'omografia Ω, il piano $v_2 = 0$ il quale sega la superficie σ, nella curva Γ_1. Ne segue che tale curva è irriduttibile e quindi, in forza della proposizione dimostrata nel § 2, il suo genere è zero od uno. Se ne conclude che anche la curva Γ, intersezione della superficie σ col piano (20) è di genere zero od uno, cioè che *sulla superficie σ esiste un sistema lineare Σ, di dimensione* 2 *e quindi di grado $n \geq 1$, di curve irriducibili di genere zero od uno*. Ma, per un teorema di Castelnuovo-Enriques (3),

(1) Questo caso è da escludersi corrispondendo a quello in cui, mancando in P la y'', l'equazione differenziale data si riduce di prim'ordine.

(2) G. Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche* ecc., Rend R. Acc. dei Lincei, s. 5ª, t. III-1 (1º sem. 1894), pag. 22.

(3) Ved. p. es. la *Nota* di Castelnuovo ed Enriques aggiunta al t. II della *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépend.* di Picard e Simart (Paris, Gauthier-Villars, 1906), n. 22, pag. 510.

una superficie dotata di un sistema lineare almeno ∞^1 di curve di genere π, di grado $n > 2\pi - 2$, è razionale o trasformabile birazionalmente in una rigata; dunque la superficie σ o è razionale o è birazionalmente equivalente ad una rigata, necessariamente *ellittica*.

4. Il teorema dimostrato nei paragrafi precedenti deve la sua importanza sovratutto al fatto che esso permette di sostituire ad una data equazione a punti critici fissi del tipo (2), un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine particolarmente semplici.

Infatti, supposto per primo che la superficie σ sia razionale, sarà possibile trovare due parametri ξ ed η tali che si abbia

$$\begin{cases} u_1 = \mathrm{R}_1(x_0|\xi,\eta)\ ,\ u_2 = \mathrm{R}_2(x_0|\xi,\eta)\ ,\ u_3 = \mathrm{R}_3(x_0|\xi,\eta)\ ; \\ \xi = \mathrm{S}_1(x_0|u_1,u_2,u_3)\ ,\ \eta = \mathrm{S}_2(x_0|u_1,u_2,u_3)\ , \end{cases}$$

dove $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots \mathrm{S}_2$ denotano delle funzioni razionali degli argomenti a destra della sbarretta. In altre parole, non supponendo più x_0 fisso, l'equazione differenziale (2) può riguardarsi ottenuta eliminando ξ ed η fra le equazioni

$$y = \mathrm{R}_1(x|\xi,\eta)\ ,\ y' = \mathrm{R}_2(x|\xi,\eta)\ ,\ y'' = \mathrm{R}_3(x|\xi,\eta)\ ; \tag{21}$$

eliminazione che può pensarsi compiuta sostituendo, in una qualsiasi delle (21), i valori di ξ ed η in funzione di y, y' e y'' dati dalle formule

$$\xi = \mathrm{S}_1(x|y,y',y'')\ ,\qquad \eta = \mathrm{S}_2(x|y,y',y'')\ . \tag{22}$$

Ciò premesso, deriviamo le (22) rispetto ad x, otterremo così

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} = \dfrac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial y} y' + \dfrac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial y'} y'' + \dfrac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial y''} y''' \\ \dfrac{d\eta}{dx} = \dfrac{\partial \mathrm{S}_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{S}_2}{\partial y} y' + \dfrac{\partial \mathrm{S}_2}{\partial y'} y'' + \dfrac{\partial \mathrm{S}_2}{\partial y''} y''' \end{cases}$$

ovvero, sostituendo ad y''' il suo valore

$$y''' = -\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} y' + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y'} y''\right) \Big/ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y''}$$

tratto dalla (2):

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} = \mathrm{T}_1(x|y,y',y'') \\ \dfrac{d\eta}{dx} = \mathrm{T}_2(x|y,y',y''), \end{cases} \tag{23}$$

dove T_1 e T_2 denotano due funzioni razionali di y, y' e y''. Finalmente sostituiamo, nelle (23), ad y, y' e y'' i loro valori dati dalle (21); otterremo così $d\xi/dx$ e $d\eta/dx$ espresse come funzioni razionali di ξ ed η, cioè otterremo un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine in ξ ed η, equivalente all'equazione differenziale data, che può porsi sotto la forma

$$\text{(24)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= \frac{Y(x|\xi,\eta)}{X(x|\xi,\eta)} \\ \frac{d\eta}{dx} &= \frac{Z(x|\xi,\eta)}{X(x|\xi,\eta)}, \end{aligned} \right.$$

dove X, Y e Z denotano tre polinomî in ξ ed η, con coefficienti funzioni analitiche di x, primi fra loro per x generico.

In modo perfettamente analogo si procede allorchè la superficie σ, invece di essere razionale, è birazionalmente equivalente ad una rigata ellittica. In tal caso è possibile trovare tre parametri ξ, η e ζ, legati dalla relazione

$$\zeta^2 = \eta(\eta-1)\,[\eta - H(x_0)],$$

tali che la superficie σ possa rappresentarsi parametricamente con le formule

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_1 = R_1^*(x_0|\xi,\eta,\zeta) & , \; u_2 = R_2^*(x_0|\xi,\eta,\zeta) & , \; u_3 = R_3^*(x_0|\xi,\eta,\zeta) \\ \xi = S_1^*(x_0|u_1,u_2,u_3) & , \; \eta = S_2^*(x_0|u_1,u_2,u_3) & , \; \zeta = S_3^*(x_0|u_1,u_2,u_3), \end{array} \right.$$

dove R_1^*, R_2^*, ... S_3^* denotano delle funzioni razionali degli ultimi tre argomenti. Si perviene così al sistema differenziale

$$\text{(25)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= \frac{1}{X^*(x|\xi,\eta)} \left\{ Y_1(x|\xi,\eta) + Y_2(x|\xi,\eta) \sqrt{\eta(\eta-1)\,[\eta - H(x)]} \right\} \\ \frac{d\eta}{dx} &= \frac{1}{X^*(x|\xi,\eta)} \left\{ Z_1(x|\xi,\eta) + Z_2(x|\xi,\eta) \sqrt{\eta(\eta-1)\,[\eta - H(x)]} \right\} \end{aligned} \right.$$

dove X^*, Y_1, Y_2, Z_1 e Z_2 sono cinque polinomî in ξ ed η tali che, per x generico, X^* e i massimi comun divisori fra Y_1 e Y_2 e fra Z_1 e Z_2, sono primi fra loro.