ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Spazî Riemanniani luoghi di varietà totalmente geodetiche.* Nota di E. Bompiani [1], presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

1. Determino in questa Nota una forma tipica o canonica per la metrica di una varietà V_n che possa considerarsi luogo di varietà V_m totalmente geodetiche (cioè tali che ogni geodetica di V_m sia tale anche per la V_n ambiente).

Per $m = n - 1$, cioè se V_n è luogo di ∞^1 V_{n-1} totalmente geodetiche, l'elemento lineare ds di V_n può porsi sotto la forma

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n-1} a_{ik}(x_1, \dots, x_{n-1})\, dx_i\, dx_k + a_{nn}(x_1, \dots, x_n)\, dx_n^2\,;$$

le ipersuperficie $dx_n = 0$ sono totalmente geodetiche: esse risultano applicabili e l'applicabilità è determinata dalle loro traiettorie ortogonali. Ciò è noto dalle ricerche dell'Hadamard [2] e del Ricci [3]: questi ha aggiunto la notevolissima proprietà delle traiettorie ortogonali di costituire una *congruenza principale* di V_n.

Qui mi occupo del caso di ∞^{n-m} V_m totalmente geodetiche che riempiano la V_n (una V_m per ogni punto di V_n) con $m < n - 1$, sfruttando, con opportune considerazioni geometriche, il risultato ora ricordato.

2. Si scelga entro il sistema ∞^{n-m} di V_m un sistema qualsiasi ∞^1 di esse, e sia V_{m+1} la varietà da esso determinata. Poichè le ∞^1 V_m sono totalmente geodetiche in V_n, lo sono anche nella varietà V_{m+1} in essa subordinata: quindi, per quanto si è detto, queste V_m sono applicabili e l'applicabilità è determinata dalle traiettorie ortogonali.

Siccome il sistema ∞^1 è completamente arbitrario, tutte le V_m sono fra loro applicabili, e la direzione che congiunge un punto di V_m col punto corrispondente (nell'applicabilità) sopra una qualsiasi V'_m infinitamente vicina è ortogonale alla V_m nel punto di partenza; cioè appartiene alla giacitura S_{n-m} normale a V_m in quel punto.

(1) Presentata nella seduta del 17 giugno 1923.

(2) *Sur les éléments linéaires à plusieures dimensions* [Bull. Soc. Math. de France, 1902].

(3) *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque*, etc. [Rend. Acc. Lincei, 1903]; *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze ecc., 1904].

In altri termini: si consideri il luogo dei punti corrispondenti (nell'applicabilità) ad un punto di una V_m; si ha così una V_{n-m}, e, al variare del punto su V_m, si ha un sistema ∞^m di V_{n-m}. Una V_m ed una V_{n-m} aventi un punto comune, sono ivi ortogonali [1].

3. I due sistemi di ∞^m V_{n-m} e di ∞^{n-m} V_m permettono d'introdurre nella varietà V_n un sistema di coordinate atto a dare al ds^2 (di V_n) la forma tipica voluta.

Infatti, sopra una V_m, che indicheremo con V_m^0, si sia introdotto un sistema di coordinate (qualsiasi), $u_1, u_2, \ldots, u_m$, e analogamente, sopra una V_{n-m}, che indicheremo con V_{n-m}^0, un sistema di coordinate $v_1, v_2, \ldots, v_{n-m}$. Per un punto generico P di V_n passa una V_{n-m} ed una V_m: la V_{n-m} incontra V_m^0 in un punto di coordinate $(u_1, \ldots, u_m)$ e la V_m incontra V_{n-m}^0 in un punto $(v_1, \ldots, v_{n-m})$; possiamo quindi assumere come coordinate di P $(u_1, \ldots, u_m; v_1, \ldots, v_{n-m})$: i punti ai quali spettano le stesse coordinate v stanno sopra una V_m, e i punti aventi le stesse coordinate u stanno su V_{n-m}.

Per il ds^2 di V_n si avrà

$$ds^2 = \sum_{1}^{m}{}_{ik}\, a_{ik}(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_{n-m})\, du_i\, du_k +$$
$$+ \sum_{1}^{n-m}{}_{ik}\, b_{ik}(u_1, \ldots, v_{n-m})\, dv_i\, dv_k + \sum c_{rs}\, du_r\, dv_s\,;$$

però le c_{rs} sono nulle per l'ortogonalità fra le V_m e le V_{n-m}, e le a_{ik} non possono contenere le v per l'applicabilità di due V_m (in punti appartenenti a $du_1 = \cdots = du_m = 0$).

Sicchè si avrà

$$ds^2 = \sum_{1}^{m}{}_{ik}\, a_{ik}(u_1, \ldots, u_m)\, du_i\, du_k + \sum b_{ik}(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_{n-m})\, dv_i\, dv_k.$$

Questa forma è tipica per le V_n in esame: è facile constatare che le geodetiche sulle V_m $dv_i = 0$ sono geodetiche di V_n.

4. Le proprietà geometriche di questo ds^2, che fanno riscontro a quella ricordata per le traiettorie ortogonali data dal Ricci (e che però vanno ricercate per tutt'altra via), e le specializzazioni ch'esso può ricevere, verranno esposte in una Nota del Circolo Matematico di Palermo.

[1] In sostanza la considerazione delle V_{n-m} così introdotte prova, senza bisogno di calcoli, che l'insieme delle giaciture normali alle V_m è *integrabile* (cioè che quelle giaciture S_{n-m} si possono ordinare in modo che appartengano ad ∞^m V_{n-m}): ciò che è evidente soltanto nel caso $n = m + 1$.

Meccanica. — *Sopra un problema di statica elastica suggerito dal raffreddamento della Terra.* Nota di FRANCESCO SBRANA [1], presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. I movimenti che avvengono alla superficie della Terra, per effetto dell'attrazione luni-solare, come le maree oceaniche, le deformazioni del suolo, e lo spostamento dei poli, conducono a ritenere la Terra paragonabile ad una massa elastica. Già Lord Kelvin si valse di questa ipotesi, e, dall'esame della deformazione elastica di una sfera soggetta all'attrazione lunare, dedusse un valore per il modulo di rigidità terrestre, che è tuttora riconosciuto accettabile. Successivamente, coi mezzi forniti dalla teoria matematica dell'elasticità, si è giunti a risultati teorici sufficientemente concordi coi dati sperimentali [2].

Partendo sempre da questo presupposto, ammettendo cioè che la Terra sia dotata di una certa elasticità, si può ricercare una conferma di un altro fenomeno, generalmente ammesso: del progressivo affievolirsi del calore interno terrestre. Per poter giungere ad un apprezzamento di questo fenomeno, risolveremo dapprima il problema dell'equilibrio *relativo* di una sfera elastica, omogenea e isotropa, soggetta all'attrazione di un corpo lontano, ed a pressioni superficiali nulle. In seguito, ammettendo che il corpo perturbante descriva la sua orbita, valuteremo la dissipazione di energia (dovuta al lavoro delle forze interne) corrispondente a un intero ciclo. Ci conviene, per questo, supporre che la massa sferica si comporti come un fluido viscoso. Per un tal fluido la perdita di energia (e la conseguente perdita di calore) dovuta alla viscosità, è misurata per mezzo della cosidetta *funzione di dissipazione* [3], che è una forma quadratica nelle componenti della velocità di deformazione. Calcoleremo tale funzione in corrispondenza a componenti di velocità definite come le derivate rapporto al tempo delle componenti di deformazione determinate nel modo sopra indicato. Avremo così un mezzo per riconoscere il progressivo raffreddamento terrestre.

[1] Presentata nella seduta del 1° giugno 1923.

[2] Notizie diffuse sull'argomento sono riportate in due Note di Ch. Lallemand, inserite nell' « Annuaire publié par le Bureau des Longitudes », 1909-1910.

[3] Cfr. Brillouin, *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*, 1ère partie, 1907, pag. 32 e segg.