ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Geometria differenziale. — *Sulle superficie rigate con un sistema di traiettorie isogonali alle generatrici deformabili in linee di livello.* Nota del dott. GIOVANNI SANSONE, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI [1].

In una mia Memoria inserita nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » [2] ho dimostrato incidentalmente che se in una superficie rigata le traiettorie ortogonali alle generatrici sono deformabili in linee di livello, la superficie è applicabile sull'elicoide rigata d'area minima. Con questa Nota estendo il resultato col seguente teorema: *Se le traiettorie sotto angolo σ costante* ($\sigma \neq 0$) *delle generatrici di una superficie rigata* S *sono deformabili in linee di livello, la* S *è una superficie applicabile sull'elicoide rigata d'area minima.*

Sia

$$ds^2 = du^2 + G dv^2 ,$$

il quadrato dell'elemento lineare di una superficie rigata S riferita alle sue generatrici $v =$ cost. e alle traiettorie ortogonali $u =$ cost.; può porsi:

$$G = 1 + \alpha(v)\,[u - \beta(v)]^2 \text{ [3]}, \tag{1}$$

con α β funzioni della sola v. Si escluderà il caso $\alpha(v) = 0$, $(G = 1)$, perchè la S è sviluppabile e le traiettorie delle generatrici possono stendersi su un piano.

Sia ora:

$$\varphi(u\,,\,v) = \text{cost.}$$

l'equazione delle traiettorie sotto angolo σ delle $v =$ cost.; sarà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen} \sigma\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \lambda \sqrt{G} \cos \sigma \text{ [4]}. \tag{2}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 giugno 1923.

[2] Cfr. G. Sansone, *Sulle superficie con due famiglie di curve ortogonali deformabili in linee di livello e sopra una proprietà caratteristica delle superficie d'area minima.*, [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLVI, (1922) p. 416, teor. III].

[3] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, (seconda edizione 1902), vol. I, p. 259, (8).

[4] L. Bianchi, loc. cit. [3], pag. 90.

Se le $\varphi(u, v) = \text{cost.}$ si possono trasformare per una deformazione della S in linee di livello (linee in piani paralleli) sarà la funzione φ una soluzione dell'equazione di Darboux:

$$(3) \qquad \Delta_{22}\varphi = (1 - \Delta_1\varphi)\, K\,, \text{ [1]}$$

indicando K la curvatura totale di S e $\Delta_1\varphi$, $\Delta_{22}\varphi$ i noti parametri differenziali primo e secondo di φ rispetto alla forma differenziale $ds^2 = du^2 + G dv^2$. Dalle equazioni (2) e (3) si hanno per il parametro λ le seguenti equazioni [2]:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{G}}{G-1}\dfrac{\partial G}{\partial u}\lambda^2 + tg\sigma \dfrac{\partial \lambda^2}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{G}(G-1)}\dfrac{\partial G}{\partial u}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{G(G-1)}\dfrac{\partial G}{\partial u}\lambda^2\, tg\sigma - tg\sigma\dfrac{\partial\lambda^2}{\partial u} = \dfrac{1}{G(G-1)}\dfrac{\partial G}{\partial u}\, tg\,\sigma\,, \end{cases}$$

ed esse esprimono le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza della φ. Dalle (4) derivando la prima rispetto ad u e la seconda rispetto a v e sommando si ha:

$$(5) \qquad \left[-\frac{1}{2\sqrt{G}(G-1)^2}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + tg\sigma\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{G(G-1)}\frac{\partial G}{\partial u}\right]\right]\lambda^2 =$$

$$= -\frac{1}{2G\sqrt{G}(G-1)^2}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + tg\,\sigma\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{G(G-1)}\frac{\partial G}{\partial u}\right].$$

Facilmente si verifica che per essere il coefficiente di $tg\sigma$, $\dfrac{\partial}{\partial v}\left[\dfrac{1}{G(G-1)}\dfrac{\partial G}{\partial u}\right]$ nullo, è necessario e basta che si abbia $\alpha = \text{cost.}$, $\beta = \text{cost.}$ e qualunque si sia σ la soluzione del sistema (4) è $\lambda^2 = \dfrac{1}{G}$; in tal caso la S è applicabile sull'elicoide rigata d'area minima [3] e le traiettorie isogonali alle generatrici sono per la dimostrazione fatta deformabili in linee di livello (qualunque sia l'angolo σ) [4].

Escluso questo caso, essendo $G \neq 1$, per qualsiasi valore di σ il coefficiente di λ^2 nel primo membro della (5) e il secondo membro non possono

[1] L. Bianchi, loc. cit. [3] p. 239.

[2] Cfr. G. Sansone, loc. cit. [2], p. 419 (24).

[3] Cfr. L. Bianchi, loc. cit. [3], vol. II, p. 332.

[4] La proprietà è ben nota ed è comune alle traiettorie isogonali di un sistema di linee di livello di una superficie d'area minima. (Cfr. L. Bianchi, loc. cit. [3], vol. II, p. 318).

essere nulli insieme, quindi λ^2 assume la forma:

$$\lambda^2 = \frac{tg\,\sigma + \frac{a}{G}}{tg\,\sigma + a}\,, \tag{6}$$

con a funzione di u e v, e $tg\sigma + a \neq 0$. Sostituendo la (6) nelle (4) e tenuto conto che è $\sigma \neq 0\,, \frac{\pi}{2}$ (caso noto) si trovano per a le due equazioni:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{a}{G^2}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{1}{G} - 1\right)\frac{\partial a}{\partial v}\right] tg\,\sigma + \tag{7}$$

$$+ a\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{a}{G^2}\frac{\partial G}{\partial v}\right] = 0\ ;\ \left(\frac{1}{G} - 1\right)\frac{\partial a}{\partial v} = 0\,.$$

Dalla seconda di esse, poichè è $G \neq 1$ si ha: $\frac{\partial a}{\partial u} = 0\,, a = a(v)$. Non può essere poi $\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{a}{G^2}\frac{\partial G}{\partial v} = 0$, dovrebbe essere in tal caso $\frac{\partial a}{\partial v} = 0$, $a =$ cost. assoluta, quindi: $G\sqrt{G}\frac{\partial G}{\partial u} = a\frac{\partial G}{\partial v}$ e per l'espressione (1) di G:

$$4\left[1 + \alpha(u-\beta)^2\right]^3 = a^2\left[\frac{\alpha'(v)}{\alpha(v)}(u-\beta) - 2\beta'\right]^2.$$

Quest'ultima, poichè u e v sono variabili indipendenti deve essere un'identità, sarà perciò nullo il coefficiente di u^6, $4\alpha^3$ nel primo membro, ossia $\alpha = 0$, caso escluso. Dalla prima delle (7) si ha allora:

$$\frac{1}{G-1}\left[\sqrt{G}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{a}{G}\frac{\partial G}{\partial v}\right] = \frac{a'(v)\,tg\sigma}{a(v) + tg\sigma} = h(v)\,,$$

od anche, posto:

$$u - \beta(v) = u_1\,, \tag{8}$$

deve essere:

$$4\left[1 + \alpha(v)u_1^2\right]^3 = \left[h(v)\,\alpha(v)\,u_1^3 + \left\{h(v) + a(v)\frac{\alpha'(v)}{\alpha(v)}\right\}u_1 - 2a(v)\,\beta'(v)\right]^2. \tag{9}$$

Questa equazione rispetto ad u_1 deve essere un'identità, in caso contrario si avrebbe $u_1 = u_1(v)$ e per la (8) $u = \beta(v) + u_1(v)$ che è assurda.

Uguagliando i coefficienti della sesta, terza potenza di u_1 e i termini noti dei due membri della (9) deve essere:

$$4\alpha(v)=h^2(v)\ ;\ 4a\,\alpha(v)\,\beta'(v)\,h(v)=0\ ;\ 1=a^2\,\beta'^2(v). \tag{10}$$

Poichè è α diverso da zero, per la prima delle (10) è $h \neq 0$ e per la seconda $a\beta'(v)=0$ ciò che è impossibile per la terza delle (10) stesse.

Si conclude che l'unico caso in cui esiste un sistema di traiettorie isogonali alle generatrici di una rigata S deformabili in linee di livello per una conveniente deformazione della S si ha per $\alpha(v)=\text{cost}$, $\beta(v)=\text{cost.}$, cioè per la S applicabile sull'elicoide rigata d'area minima.

Fisica. — *Grandezza dei granuli di una soluzione birifrangente di ferro colloidale e costante di Avogadro* [1]. Nota di L. Tieri, presentata dal Socio M. O. Corbino [2].

Gli studî di Van t' Hoff sulle soluzioni avevano messo in evidenza la completa analogia fra le sostanze disciolte e i gas. Le leggi di Raoult, dedotte da quelle di Van t' Hoff, sono applicabili a tutte le soluzioni diluite, qualunque sia la grandezza delle molecole del corpo disciolto.

Il Perrin, con le sue interessanti ricerche, estese le leggi delle soluzioni diluite alle emulsioni, supponendo che un granulo, agitato da moti browniani, si comporti come una molecola di un corpo in soluzione. Tale ipotesi, convalidata da numerose esperienze, condusse il Perrin alla determinazione della costante di Avogadro. Egli contò il numero di granuli contenuti in eguali volumi su quattro sezioni ad altezze diverse in una colonna di emulsione in equilibrio statistico, giungendo al risultato che la legge di Laplace sulla distribuzione verticale delle molecole di un gas, vale anche per i granuli di una soluzione colloidale.

La legge di Laplace estesa ad una emulsione, i cui granuli lasciati in riposo prendono una distribuzione di equilibrio per effetto dei moti browniani e della forza di gravità, conduce all'equazione:

$$\mathrm{RT}\log_e\frac{n_o}{n}=\mathrm{N}\,\frac{4}{3}\,\pi\,a^3\,(\Delta-\delta)\,gh \tag{1}$$

nella quale R è la costante dei gas, T la temperatura assoluta, n_o e n i numeri di granuli rispettivamente contenuti nell'unità di volume nella parte inferiore e in quella superiore della colonna di altezza h dell'emulsione presa

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della R. Università di Roma.
[2] Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1923.