ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Meccanica. — *Sopra un problema di statica elastica suggerito dal raffreddamento della Terra.* Nota di FRANCESCO SBRANA [1], presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. I movimenti che avvengono alla superficie della Terra, per effetto dell'attrazione luni-solare, come le maree oceaniche, le deformazioni del suolo, e lo spostamento dei poli, conducono a ritenere la Terra paragonabile ad una massa elastica. Già Lord Kelvin si valse di questa ipotesi, e, dall'esame della deformazione elastica di una sfera soggetta all'attrazione lunare, dedusse un valore per il modulo di rigidità terrestre, che è tuttora riconosciuto accettabile. Successivamente, coi mezzi forniti dalla teoria matematica dell'elasticità, si è giunti a risultati teorici sufficientemente concordi coi dati sperimentali [2].

Partendo sempre da questo presupposto, ammettendo cioè che la Terra sia dotata di una certa elasticità, si può ricercare una conferma di un altro fenomeno, generalmente ammesso: del progressivo affievolirsi del calore interno terrestre. Per poter giungere ad un apprezzamento di questo fenomeno, risolveremo dapprima il problema dell'equilibrio *relativo* di una sfera elastica, omogenea e isotropa, soggetta all'attrazione di un corpo lontano, ed a pressioni superficiali nulle. In seguito, ammettendo che il corpo perturbante descriva la sua orbita, valuteremo la dissipazione di energia (dovuta al lavoro delle forze interne) corrispondente a un intero ciclo. Ci conviene, per questo, supporre che la massa sferica si comporti come un fluido viscoso. Per un tal fluido la perdita di energia (e la conseguente perdita di calore) dovuta alla viscosità, è misurata per mezzo della cosidetta *funzione di dissipazione* [3], che è una forma quadratica nelle componenti della velocità di deformazione. Calcoleremo tale funzione in corrispondenza a componenti di velocità definite come le derivate rapporto al tempo delle componenti di deformazione determinate nel modo sopra indicato. Avremo così un mezzo per riconoscere il progressivo raffreddamento terrestre.

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1923.

(2) Notizie diffuse sull'argomento sono riportate in due Note di Ch. Lallemand, inserite nell' « Annuaire publié par le Bureau des Longitudes », 1909-1910.

(3) Cfr. Brillouin, *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*, 1ère partie, 1907, pag. 32 e segg.

2. Mentre riserbiamo ad altra occasione il compimento della ricerca, ci proponiamo ora di indicare la soluzione del problema elastico preliminare. Dovremo supporre che le forze esterne di massa derivino dal potenziale

$$\Omega = \frac{\gamma M}{D^2} r \cos\theta - \frac{\gamma M}{\sqrt{D^2 - 2rD\cos\theta + r^2}} \ (^1),$$

dove r sia la distanza di un punto generico P della sfera dal centro O, D la distanza da O del baricentro C del corpo perturbante, θ l'angolo P(O)C, M la massa del corpo, e γ la costante di attrazione universale. Sviluppando Ω secondo le potenze di r/D, e trascurando quelle superiori alla seconda, si trova

$$\Omega = \frac{3}{2} \frac{\gamma M}{D^3} r^2 \left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right). \tag{1}$$

Al potenziale Ω attribuiremo appunto quest'ultima espressione approssimata. Supporremo inoltre, come si è detto, trascurabili le pressioni alla superficie della sfera. In queste condizioni, si perviene nel modo più semplice a determinare la deformazione richiesta, applicando il metodo dell'Almansi [2].

Scelto un sistema di assi coordinati ortogonali x, y, z coll'origine in O, e dette u, v, w le componenti, secondo questi assi, dello spostamento del punto (x, y, z) della sfera, si ottiene (quando, per semplicità, si suppongano nulle le componenti dello spostamento e della rotazione in O) [3]

$$\left\{ \begin{aligned} u &= a_1 x\, \Omega + (a_2 r^2 + a_3) \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ v &= a_1 y\, \Omega + (a_2 r^2 + a_3) \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ w &= a_1 z\, \Omega + (a_2 r^2 + a_3) \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right. \tag{2}$$

[1] Cfr. Lamb, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, 1907, pag. 417 e segg. Si riconosce facilmente che forze siffatte formano un sistema *equilibrato*, e cioè che soddisfano alle *equazioni cardinali* della Statica.

[2] Una chiara esposizione di questo metodo si trova nella *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, del Marcolongo, 1904, cap. 8°.

[3] Rimovendo questa ipotesi, si dovranno aggiungere, ai secondi membri delle (2), le quantità

$$u_0 + \omega_{02} z - \omega_{03} y \ , \ v_0 + \omega_{03} x - \omega_{01} z \ , \ w_0 + \omega_{01} y - \omega_{02} x \, ,$$

dove u_0, v_0, w_0 siano le componenti dello spostamento, $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$ le componenti della rotazione in O.

dove a_1, a_2, a_3 sono costanti opportune. Precisamente, se con R indichiamo il raggio della sfera, con δ la sua densità, e con λ e μ le due costanti di Lamé, si trova

$$a_1 = \frac{2\delta(\lambda+\mu)}{\mu(19\lambda+14\mu)}, \quad a_2 = -\frac{\delta(5\lambda+4\mu)}{2\mu(19\lambda+14\mu)}, \quad a_3 = \frac{\delta \mathrm{R}^2(4\lambda+3\mu)}{\mu(19\lambda+14\mu)}$$ [1].

Matematica. — *Proprietà di media dei parametri differenziali in uno spazio curvo.* Nota di Rocco Serini [2], presentata dal Socio T. Levi-Civita.

È noto che i parametri differenziali primo e secondo di una funzione nello spazio ordinario sono rispettivamente proporzionali ai valori medî dei quadrati delle derivate prime e delle derivate seconde, in tutte le direzioni che si possono considerare intorno a ciascun punto. (Vedi p. es. Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, pag. 167).

Si tratta di estendere questa proprietà ad un S_n qualunque.

1) Si abbia in primo luogo un S_n euclideo il cui ds^2 sia ridotto alla forma

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2. \tag{1}$$

Con centro nel punto P considero l'ipersfera di raggio l: sia Σ la sua superficie, $d\Sigma$ l'elemento di essa. Se diciamo $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, le costanti di direzione delle geodetiche (rette) uscenti da P, legate per la (1) dalla relazione

$$\Sigma \xi_i^2 = 1\,, \tag{2}$$

si ha

$$\frac{1}{\Sigma}\int \xi_i \xi_k \, d\Sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } i = k\,, \\ 0 & \text{se } i \neq k\,. \end{cases} \tag{3}$$

[1] Le espressioni (2) delle componenti di spostamento coincidono, formalmente, con quelle ottenute da Lord Kelvin, per il caso dell'equilibrio di una sfera omogenea, imcomprimibile (soggetta alle stesse forze di massa, ed a pressioni superficiali nulle). Cfr., p. es, Love, *Some problems of geodynamics*, 1911, pag. 58 e segg.

[2] Presentata nella seduta del 17 giugno 1923.