ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

dove a_1, a_2, a_3 sono costanti opportune. Precisamente, se con R indichiamo il raggio della sfera, con δ la sua densità, e con λ e μ le due costanti di Lamé, si trova

$$a_1 = \frac{2\delta(\lambda+\mu)}{\mu(19\lambda+14\mu)}, \; a_2 = -\frac{\delta(5\lambda+4\mu)}{2\mu(19\lambda+14\mu)}, \; a_3 = \frac{\delta R^2(4\lambda+3\mu)}{\mu(19\lambda+14\mu)} \text{ (1)}.$$

Matematica. — *Proprietà di media dei parametri differenziali in uno spazio curvo.* Nota di ROCCO SERINI [2], presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È noto che i parametri differenziali primo e secondo di una funzione nello spazio ordinario sono rispettivamente proporzionali ai valori medî dei quadrati delle derivate prime e delle derivate seconde, in tutte le direzioni che si possono considerare intorno a ciascun punto. (Vedi p. es. Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, pag. 167).

Si tratta di estendere questa proprietà ad un S_n qualunque.

1) Si abbia in primo luogo un S_n euclideo il cui ds^2 sia ridotto alla forma

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2. \tag{1}$$

Con centro nel punto P considero l'ipersfera di raggio l: sia Σ la sua superficie, $d\Sigma$ l'elemento di essa. Se diciamo $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, le costanti di direzione delle geodetiche (rette) uscenti da P, legate per la (1) dalla relazione

$$\Sigma\, \xi_i^2 = 1, \tag{2}$$

si ha

$$\frac{1}{\Sigma}\int \xi_i\, \xi_k\, d\Sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } i = k, \\ 0 & \text{se } i \neq k. \end{cases} \tag{3}$$

(1) Le espressioni (2) delle componenti di spostamento coincidono, formalmente, con quelle ottenute da Lord Kelvin, per il caso dell'equilibrio di una sfera omogenea, imcomprimibile (soggetta alle stesse forze di massa, ed a pressioni superficiali nulle). Cfr., p. es, Love, *Some problems of geodynamics*, 1911, pag. 58 e segg.

(2) Presentata nella seduta del 17 giugno 1923.

La seconda delle (3) è evidente per ragioni di simmetria: inoltre, non dovendo $\int \xi_i^2 \, d\Sigma$ dipendere dall'indice i, dalla (2) si ricava la (3).

Si osservi allora che se V è una funzione delle x_i

$$\frac{dV}{dl} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \xi_i \quad , \quad \frac{d^2 V}{dl^2} = \Sigma \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \, \partial x_k} \xi_i \xi_k ,$$

e quindi per le (3)

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\Sigma} \int \left(\frac{dV}{dl} \right)^2 d\Sigma &= \frac{1}{n} \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{n} \Delta V , \\ \frac{1}{\Sigma} \int \frac{d^1 V}{dl^2} \, d\Sigma &= \frac{1}{n} \Sigma \; \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \quad = \frac{1}{n} \Delta^2 V , \end{aligned}$$

dove ΔV e $\Delta^2 V$ sono rispettivamente i parametri differenziali primo e secondo di V.

L'estensione delle (4) agli spazi curvi con $ds^2 = \Sigma \, a_{ik} \, dx_i \, dx_k$ è pressochè immediata quando si osservi:

1°) che nella ricerca dei due valori

$$\lim_{l=0} \frac{1}{\Sigma} \int \left(\frac{dV}{dl} \right)^2 d\Sigma \quad , \quad \lim_{l=0} \frac{1}{\Sigma} \int \frac{d^2 V}{dl^2} \, d\Sigma ,$$

interviene soltanto l'intorno del primo ordine del punto P;

2°) che è sempre possibile considerare l'intorno del primo ordine di P come euclideo e ridotto alla forma (1): basta prendere (il che è sempre possibile) coordinate tali che in P sia

$$a_{ii} = 1 \ , \ a_{ik} = 0 \ , \ \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} = 0 \, .$$

3°) che ΔV e $\Delta^2 V$ sono invarianti, cioè indipendenti dal sistema coordinato.

Avremo quindi per un ds^2 qualsiasi

$$\frac{1}{n} \Delta V = \lim_{l=0} \frac{1}{\Sigma} \int \left(\frac{dV}{dl} \right)^2 d\Sigma \ , \ \frac{1}{n} \Delta^2 V = \lim_{l=0} \frac{1}{\Sigma} \int \frac{d^2 V}{dl^2} \, d\Sigma .$$