ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

tonicamente disturbatrice (per intenso corrugamento e rovesciamento), che possiamo denominare zona di Canossa.

Se poi esaminiamo il rilievo di « La Collina » sopra Banzola, specialmente risalendone i burroni che lo solcano dal lato orientale mettendone bene a nudo la costituzione, vediamo essere formato dalle marne grigie (Miocene inferiore) suborizzontali o appena dolcemente inclinate verso nord-ovest in modo appunto che, prolungandone gli strati in tale direzione, essi andrebbero a collegarsi, almeno parzialmente, con quelli analoghi e con analogo andamento stratigrafico, per rovesciamento, che (come si è sopra accennato) sviluppansi in fondo a Val Campola tra Casola e Votigno.

Per cui quando giungiamo in cima di « La Collina » e ne vediamo le marne mioceniche coronate da una larga placca di Argille scagliose coi soliti calcari alberesi, grugni ofiolitici, ecc. è naturale che la interpretiamo come un lembo residuo della analoga e poco lontana zona cretacea di Canossa per avvenuto suo rovesciamento ad est-sud-est; ciò che del resto è tanto più comprensibile considerando la somma plasticità delle argille scagliose, che ne permette lo stiramento e lo schizzamento anche a distanza, con naturale ripercussione sui terreni che sono con esse a contatto.

Il fenomeno è interessante sia in sè stesso, per la sovrapposizione di una placca isolata di Cretaceo al Miocene, sia pel fatto che esso dimostra come siano stati intensissimi i fenomeni di compressione e di conseguente corrugamento dell'Appennino settentrionale non solo dopo l'epoca eocenica, come generalmente si ammette, ma anche dopo quella miocenica.

Del resto vari fatti dimostrano che il corrugamento appenninico (come forse anche, analogamente, quello alpino) andò complessivamente propagandosi, dall'epoca eocenica in poi, dalla regione assiale a quella periferica o marginale; tanto che quivi (cioè nella regione subappennina) ne furono talora interessati persino i depositi pliocenici; ciò probabilmente per l'intenso diastrofismo che aprì l'Era quaternaria.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *La Geometria sopra una curva dedotta dal computo dei moduli.* Nota del dott. Oscar Chisini, presentata dal Corrisp. Enriques [1].

Il numero $M = 3p - 3$ dei moduli da cui dipende una curva algebrica C_p, di genere p, considerata come identica alle sue trasformate birazionali, è calcolato da Enriques con due notevoli metodi fra loro essenzialmente diversi; ricorrendo per il primo alla considerazione del sistema $\{C_{np}\}$ delle curve piane C_{np} d'ordine n e genere p $(n \geq p + 2)$, e per il secondo a quella delle

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1923.

rette n — *ple* con $m = 2n + 2p - 2$ punti di diramazione assegnati (¹). In entrambi i metodi si trova che il numero M viene a dipendere dalla dimensione $r = n - p$ della g_n^r completa definita sopra una C_p da n punti in posizione generica.

Ora mi si è presentata l'idea di riavvicinare i due procedimenti, liberandoli da ogni ricorso ai teoremi della Geometria sopra una curva, che vi interviene in qualche punto, ma in modo affatto accessorio: così, considerando come incognita la suddetta dimensione r, sono pervenuto ad una equazione da cui si deduce $r = n - p$, la quale relazione esprime il teorema fondamentale che *n punti generici determinano, sopra una curva* C_p *di genere p, una g_n^{n-p} completa.* Da questo teorema, stabilito in un primo tempo così solo per le curve a moduli generali, segue facilmente tutta la teoria.

La quale indico qui assai brevemente, per la grave ristrettezza di spazio, rimandando, per i particolari, alla *Teoria geometrica delle equazioni* (vol. III, libro 5°, § 34 bis) di Enriques-Chisini, dove tale teoria si troverà sviluppata; qui intanto desidero richiamare l'attenzione del lettore anche sul modo con cui si deduce il teorema di Riemann-Roch, modo che potrebbe trovar posto in qualunque altro ordinamento della teoria stessa.

Veniamo ora alle proposizioni della nostra teoria, riferendone le dimostrazioni per quelle cui importi chiarire l'indipendenza dalla Geometria sopra la curva, o appaiano qui altrimenti notevoli.

1. Sopra una C_p, di genere p, una g_n^r completa ha la dimensione $r = n - p + i$, con $p \geq i \geq 0$.

2. Esiste un numero finito di rette n — *ple* di genere p, birazionalmente distinte, dotate di $m = 2n + 2p - 2$ punti di diramazione dati ad arbitrio (²).

3. Le curve piane C_{np}, di ordine n e genere p, per $n > p + 2$, formano un sistema continuo (³).

(¹) Atti dell'Acc. di Torino, gennaio 1912. Dal confronto dei due metodi l'A. deduce il teorema d'esistenza delle rette n — *ple*, nella forma elementare di arbitrarietà dei $2n + 2p - 2$ punti di diramazione. I due procedimenti quivi indicati sono riprodotti in forma più ampia in Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. III, libro 5°, §§ 33 e 34.

(²) Questo teorema fu stabilito per via algebrico-geometrica, senza ricorso al computo dei moduli o a considerazioni di geometria sopra la curva da Enriques. Egli ne dà brevemente la dimostrazione in una Nota dell'Accademia di Bologna (17 aprile 1921), dimostrazione riferita per esteso nella *Teoria geometrica delle equazioni* (vol. III, libro 5°, § 33). Utilizzando, come mostrò Severi (Acc. Lincei, 1915), il teorema di Lüroth-Clebsch relativo alla forma canonica di una riemanniana, ne deduce l'arbitrarietà delle sostituzioni inerenti ai punti di diramazione (donde l'estensione del teorema ai più piccoli valori di n) e l'irriducibilità del sistema delle C_p (cfr. nota 4).

(³) Teorema stabilito direttamente da Enriques nella citata Nota di Torino del 1912 (cfr. per una esposizione critica estesa Enriques-Chisini, loc. cit.), che segue anche dal teorema d'esistenza (vedi nota precedente).

4. La dimensione di questo sistema $\{C_{np}\}$ vale $3n+p-1$, e non più, i punti doppî imponendo condizioni indipendenti [1]. Infatti, nell'ipotesi contraria, imponendo altri p punti doppî, si avrebbe, entro il sistema $\{C_{np}\}$, un sistema di curve razionali d'ordine n, tale che, sopra una curva del sistema, le curve infinitamente vicine segherebbero una g_{3n-2} di dimensione, almeno, $3n-1$.

5. *Primo calcolo del numero* M *dei moduli* [2]. — Si indichi con ϱ l'infinità delle eventuali trasformazioni birazionali di una C_p (generica). Si osservi poi che sopra una C_p, per $n \geq p+2$ le g_n^2 (generiche) formano una varietà a $p-i+3(n-p+i)-6=3n+2p-6+2i$ dimensioni, e che ciascuna g_n^2 dà origine a una curva piana C_{np} e alle sue ∞^8 trasformate proiettive, mentre allo stesso insieme di C_{np} proiettive corrispondono tutte le $\infty^\varrho\, g_n^2$ di C_p, ottenute da una di esse mediante le ∞^ϱ trasformazioni birazionali della C_p. Segue

$$M=(3n+p-1)-(3n+2p-6+2i)-8+\varrho=3p-3+\varrho-2i.$$

6. *Secondo calcolo del numero* M *dei moduli* [3]. — Esiste un numero finito di C_p (birazionalmente distinte) rappresentate sopra una retta n — *pla* con $m=2n+2p-2$ punti di diramazione dati ad arbitrio, mentre sopra una C_p le g_n^1 dipendono da $2n-p+i-2$ parametri, e vi sono $\infty^\varrho\, g_n^1$ dotate di m — *ple* proiettive di gruppi di diramazione. Segue

$$M=(m-3)-(2n-p+i-2)+\varrho=3p-3+\varrho-i.$$

7. Uguagliando i due valori di M segue $i=0$, cioè

Teorema. — *Sopra una curva generica di genere* p, *un gruppo generico di* n $(\geq p+2)$ *punti appartiene ad una serie completa* g_n^{n-p}.

Come corollario: un G_p composto di p punti generici non può appartenere ad una g_p^1.

8. Sopra una curva (generica) C_{np} le *curve* φ_h, *aggiunte d'ordine* h, *segano una serie completa* (e formano un sistema non sovrabbondante) per $h \geq n-2$. Segue che segano serie complete anche le φ_h con $h<n-2$; si ha così il teorema del resto. In particolare le φ_{n-3} segano una g_{2p-2}^{p-1+i} con $i \geq 0$ *speciale*, per cui cioè l'ordine supera la dimensione per meno di p. Chiamiamo questa *serie canonica*.

La dimensione della serie canonica è esattamente $p-1$, altrimenti p punti generici apparterrebbero ad una g_p^1.

[1] Nella citata Nota di Torino dell'Enriques il computo della dimensione $3n+p-1$ del sistema $\{C_{np}\}$ si riconduce a quello della dimensione della serie segata su una particolare C_{np} dalle curve del sistema, ad essa infinitamente vicine, e include quindi nozioni sostanziali della Geometria sopra una curva, che qui importa invece stabilire.

[2] Enriques, Nota in Atti dell'Acc. di Torino, 1912.

[3] Enriques, Nota dell'Acc. di Torino, 1912.

9. Preso sopra la C_p un gruppo generico G_{p-1} di $p-1$ punti, si considerino i punti che insieme al G_{p-1} formano un G_p *speciale*, cioè appartenente ad una g_p^1. Si avranno così certi punti $P_1 P_2 \dots P_s$, e sarà $s \geq p-1$, poichè fra i punti P_i vi sono certo i $p-1$ punti che insieme al G_{p-1} formano un gruppo canonico.

Ora si prova che $s = p-1$, cioè che « ogni G_p speciale appartiene alla g_{2p-2}^{p-1} canonica » (almeno — per ora — quando il G_p contenga un G_{p-1} generico non appartenente ad una g_{p-1}^1).

Si consideri infatti la serie completa definita da $G_{p-1} + P_1 + P_2 \dots + P_s$. La sua dimensione vale esattamente s, imperocchè diminuisce successivamente di 1 quando si staccano i punti $P_1 P_2 \dots$ nessuno dei quali può riuscire fisso, altrimenti il G_{p-1} apparterrebbe ad una g_{p-1}^1. Ma non può essere $s \geq p$, altrimenti questa serie, speciale, conterrebbe un G_p generico.

10. Segue, in tutta la sua generalità, il teorema di Riemann-Roch, che stabiliamo prima pel caso di una g_n^1 completa speciale $(n < p)$. Aggiungendo ad un G_n generico della nostra g_n^1 un gruppo di $p-n$ punti generici, si ottiene un G_p speciale contenuto nella g_{2p-2}^{p-1} canonica (entro il G_p esiste un G_{p-1} non appartenente ad una g_{p-1}^1, onde la deduzione è esatta). Pertanto i gruppi della g_n^1 appartengono ad ∞^{p-n} gruppi canonici.

Infine, se si ha una g_n^r completa speciale per cui $r = n - p + i$, imponendo $r-1$ punti fissi si passa al caso di prima, onde segue (teorema di Riemann-Roch): *un gruppo di una serie speciale completa g_n^{n-p+i} appartiene ad ∞^{i-1} gruppi canonici.*

11. In ciò che precede i teoremi caratteristici della geometria sopra una curva sono stabiliti per curve C_p a moduli generali; ma facilmente si passa al caso di una $\overline{C}_p$ particolare: basterà infatti stabilire che — per una sua immagine piana $\overline{C}_n$, (d'ordine $n \geq p+2$) — le curve aggiunte di un certo ordine m segano una serie completa, poichè, per m alto, il sistema di queste φ_m non è certo sovrabbondante, e sega quindi una serie la cui dimensione vale l'ordine meno p.

Ora se la serie segata su $\overline{C}$ dalle sue aggiunte $\overline{\varphi}_m$ non è completa, la serie completa verrà segata dalle aggiunte $\overline{\varphi}_{m'}$, d'ordine $m' > m$, passanti per un certo gruppo di punti $\overline{G}$. Ma, considerando una C variabile che ha per limite $\overline{C}$, la serie segata su questa dalle $\varphi_{m'}$ aggiunte, potrà essere segata similmente dalle $\varphi_{m'}$ passanti per un gruppo G che ha per limite $\overline{G}$. Il teorema del resto nella sua forma proiettiva (che qui appunto vogliamo estendere da C a $\overline{C}$) dice che « ogni gruppo di punti sezione di una $\varphi_{m'}$ per G appartiene ad una φ_m »; e questa affermazione — per sua natura — rimane vera anche al limite.