ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Matematica. — *Ancora di alcune proprietà delle equazioni normali di grado primo* [1]. Nota di Pacifico Mazzoni, presentata dal Socio G. A. Maggi [2].

5. *Gli elementi* $1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$ *sono indipendenti, cioè per mezzo di essi si può esprimere linearmente e con coefficienti razionali (e in un solo modo) un qualunque elemento di* $[\alpha_1] = [\xi_1]$.

Basta dimostrare che il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_{p-1} & \xi_p \\ \xi_2 & \xi_3 & \ldots & \xi_p & \xi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{p-1} & \xi_p & \ldots & \xi_{p-3} & \xi_{p-2} \end{vmatrix}$$

è $\neq 0$. Aggiungendo all'ultima colonna le precedenti, si ottengono come elementi dell'ultima colonna: $p, 0, 0, \ldots, 0$; e dunque:

$$\frac{\Delta}{p} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_{p-1} \\ \xi_2 & \xi_3 & \ldots & \xi_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{p-1} & \xi_p & \ldots & \xi_{p-3} \end{vmatrix}.$$

Ma questo determinante, per le (3), è il prodotto dei due seguenti:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \sqrt[n]{\mathrm{B}(\varepsilon)} \,;\, \sqrt[n]{\mathrm{B}(\varepsilon^2)} \,;\, \ldots \,;\, \sqrt[n]{\mathrm{B}(\varepsilon^{p-1})} \\ \varepsilon \,.\, \sqrt[n]{\mathrm{F}(\varepsilon)} \,;\, \varepsilon^2 \,.\, \sqrt[n]{\mathrm{B}(\varepsilon^2)} \,;\, \ldots \; \varepsilon^{p-1} \,.\, \sqrt[n]{\mathrm{B}(\varepsilon^{p-1})} \\ \varepsilon^2 \,.\, \sqrt[n]{\mathrm{B}(\varepsilon)} \,;\, \varepsilon^4 \,.\, \sqrt[n]{\mathrm{B}(\varepsilon^2)} \,;\, \ldots \,;\, \varepsilon^{2(p-1)} \sqrt[n]{\mathrm{B}(\varepsilon^{p-1})} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varepsilon^{p-2} \,.\, \sqrt[n]{\mathrm{B}(\varepsilon)} \,;\, \varepsilon^{2(p-2)} \sqrt[n]{\mathrm{B}(\varepsilon^2)} \,;\, \ldots \ldots \end{vmatrix}$$

$$\text{e } \mathrm{D}_1 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \varepsilon, & \varepsilon^2, & \varepsilon^3, & \ldots, & \varepsilon^{p-1} \\ \varepsilon^2, & \varepsilon^4, & \varepsilon^6, & \ldots, & \varepsilon^{2(p-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon^{p-2}, & \varepsilon^{2(p-2)}, & \ldots, & & \varepsilon^{(p-1)(p-2)} \end{vmatrix}.$$

[1] Presentata nella seduta del 1° giugno 1923.

[2] Vedi Nota precedente in questo volume dei Rendiconti, pag. 142.

Siccome $D = \sqrt[n]{B(\varepsilon)} \cdot \sqrt[n]{B(\varepsilon^2)} \ldots \sqrt[n]{B(\varepsilon^{p-1})} \cdot D_1$, si ha dunque:

$$\Delta = p \cdot \sqrt[n]{B(\varepsilon)} \cdot \sqrt[n]{B(\varepsilon^2)} \ldots \sqrt[n]{B(\varepsilon^{p-1})} \cdot D_1^2 .$$

Ma D_1 è il determinante di Vandermonde delle $p-1$ quantità distinte $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$, ed è $\neq 0$; e dunque anche $\Delta \neq 0$. C. d. d.

6. Gli elementi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ non sono gli unici del corpo normale considerato $[\alpha_1]$, i quali abbiano le loro proprietà, anzi si ha:

Se gli elementi coniugati $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_p$ *del corpo* $[\alpha_1]$ *hanno la somma* $= 0$, *essi si trovano nelle stesse condizioni di* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$.

Infatti allora si può porre (N. 5): $\xi'_1 = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_{p-1} \xi_{p-1}$, con $a_1, \ldots, a_{p-1}$ numeri razionali. Sostituendo alle ξ i loro valori (3), e ponendo

$$a_1 + a_2 \varepsilon + a_3 \varepsilon^2 + \ldots + a_{p-1} \varepsilon^{p-2} = \varphi(\varepsilon),$$

si ha: $\xi'_1 = \varphi(\varepsilon) \cdot \sqrt[n]{B(\varepsilon)} + \varphi(\varepsilon^2) \cdot \sqrt[n]{B(\varepsilon^2)} + \ldots + \varphi(\varepsilon^{p-1}) \cdot \sqrt[n]{B(\varepsilon^{p-1})}$. Ora posto

$$\varphi(\varepsilon) \cdot \sqrt[n]{B(\varepsilon)} = \sqrt[n]{\varphi(\varepsilon)^p \cdot B(\varepsilon)} = \sqrt[n]{A(\varepsilon)},$$

si ha: $\xi'_1 = \sqrt[n]{A(\varepsilon)} + \sqrt[n]{A(\varepsilon^2)} + \ldots + \sqrt[n]{A(\varepsilon^{p-1})}$, *che è un'espressione analoga a quella di* ξ_1. Inoltre il corpo $[\sqrt[n]{A(\varepsilon)}]$ coincide con $[\sqrt[n]{B(\varepsilon)}]$ [del resto, è $\sqrt[n]{B(\varepsilon)} = \sqrt[n]{A(\varepsilon)} : \varphi(\varepsilon)$]. C. d. d.

Si può dimostrare anche così: posto, com'è lecito:

$$\xi'_1 + \varepsilon \xi'_2 + \varepsilon^2 \xi'_3 + \ldots + \varepsilon^{p-1} \xi'_p = \sqrt[n]{A_1(\varepsilon)},$$

eseguendo la sostituzione T^k (che lascia ferme le ξ' e porta ε in ε^k), si ha:

$$\xi'_1 + \varepsilon^k \cdot \xi'_2 + \varepsilon^{2k} \cdot \xi'_3 + \ldots + \varepsilon^{(p-1)k} \xi'_p = \varepsilon^h \cdot \sqrt[n]{A_1(\varepsilon^k)},$$

e possiamo scrivere $= \sqrt[n]{A_1(\varepsilon^k)}$, prendendo una conveniente determinazione del radicale. Facendo $k = 1, 2, \ldots, p-1$, scrivendo l'uguaglianza $\xi'_1 + \xi'_2 + \ldots + \xi'_p = 0$, e sommando si ottiene:

$$p\xi'_1 = \sqrt[n]{A_1(\varepsilon)} + \sqrt[n]{A_1(\varepsilon^2)} + \ldots + \sqrt[n]{A_1(\varepsilon^{p-1})} . \text{ C. d. d.}$$

7. *Data un'equazione normale irriducibile di grado primo* p, *avente per radici* $\alpha_1\, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, *le quantità*

$$1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1} \tag{4}$$

sono sempre indipendenti, cioè formano una base del corpo $[\alpha_1]$. *E se la somma* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$ *è* $\neq 0$, *allora anche le radici* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *formano una base di* $[\alpha_1]$.

Nel caso che la somma $a = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$ sia $= 0$, il teorema è stato dimostrato. Se invece detta somma a è $\neq 0$, allora posto $\xi_i = \alpha_i - a/p$, le grandezze coniugate $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ hanno la somma $= 0$. e perciò le quantità

$$(5) \qquad 1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$$

sono indipendenti. Ma si ha:

$$1 = 1 ; \alpha_1 = \frac{a}{p} + \xi_1 ; \alpha_2 = \frac{a}{p} + \xi_2 ; \ldots ; \alpha_{p-1} = \frac{a}{p} + \xi_{p-1} ;$$

e questa sostituzione lineare che porta le (5) nelle (4) ha il modulo $\neq 0$ ($e = 1$). Perciò le (4) sono indipendenti. E segue subito, se $a \neq 0$, che anche $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sono indipendenti. C. d. d.

Infine, *le espressioni di* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *si ottengono dalle espressioni* (3) *di* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, *aggiungendovi ai secondi membri* $\frac{a}{p}$.

8. Se, in particolare, si prende per $B(\varepsilon)$ l'elemento ε_p stesso, allora si ha:

$$\sqrt[n]{B(\varepsilon)} = \varepsilon_{p^2} = e^{2\pi i/p^2} .$$

Questa radice dell'unità genera un corpo normale ciclico di grado $p(p-1)$, che contiene un sottocorpo $[\alpha_1]$ di grado p, di cui cerchiamo un elemento primitivo ξ_1.

Se x è una radice primitiva rispetto al modulo p^2, è invece $x^p = y$ una radice primitiva rispetto a p. Le coniugate di ε_{p^2} rispetto a $[\alpha_1]$ sono:

$$\varepsilon_{p^2} ; \varepsilon_{p^2}^{y} ; \varepsilon_{p^2}^{y^2} ; \ldots ; \varepsilon_{p^2}^{y^{p-2}} .$$

Infatti se la sostituzione T di $[\varepsilon_{p^2}]$ porta ε_{p^2} in $\varepsilon_{p^2}^{y}$, la T^{p-1} porta ε_{p^2} in ε_{p^2} stessa (poichè $y^{p-1} = x^{p(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^2}$). Dunque si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \varepsilon_{p^2} + \varepsilon_{p^2}^{y} + \varepsilon_{p^2}^{y^2} + \ldots + \varepsilon_{p^2}^{y^{p-2}} \text{ (con } y = x^p) \\ \xi_2 = \varepsilon_p . \varepsilon_{p^2} + \varepsilon_p^2 \cdot \varepsilon_{p^2}^{y} + \ldots + \varepsilon_p^{p-1} \cdot \varepsilon_{p^2}^{y^{p-2}} ; \text{ ecc.} \end{array} \right.$$

Si vede subito che le coniugate di ξ_1 si possono anche mettere sotto la forma:

$$\xi_i' = \sum_{r=0}^{p-2} \varepsilon_{p^2}^{x^{rp+i-1}} ,$$

che $\xi_1' = \xi_1$, e che le ξ' coincidono, in altro ordine, con le ξ. Questi elementi sono simili ai periodi di Gauss, dei quali essi hanno proprietà del tutto analoghe.