ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Matematica. — *Ancora sopra alcuni sviluppi in serie di funzioni fondamentali* (¹). Nota di CARLO SEVERINI, presentata dal Corrisp. GINO LORIA (²).

4. Riprendiamo ora le condizioni ai limiti (2), e consideriamo dapprima il caso che si abbia:

$$a_2 b_4 - a_4 b_2 \neq 0 . \tag{19}$$

Le (2) possono allora porsi sotto la forma:

$$\left\{\begin{aligned} U'_k(a) &= \alpha\, U_k(a) + \beta\, U_k(b) \\ U'_k(b) &= \gamma\, U_k(a) + \delta\, U_k(b) \end{aligned}\right. \qquad (k = 0\,,1\,,2\,,\ldots)\,, \tag{20}$$

ove:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{a_4 b_1 - a_1 b_4}{a_2 b_4 - a_4 b_2}\,, & \beta &= \frac{a_4 b_3 - a_3 b_4}{a_2 b_4 - a_4 b_2}\,, \\ \gamma &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2 b_4 - a_4 b_2}\,, & \delta &= \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_2 b_4 - a_4 b_2}\,. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Mediante le (20), alle quali soddisfano le (5), posto per semplicità di scrittura:

$$T_{n,p} = R_{n,p}(b)\, R'_{n,p}(b) - R_{n,p}(a)\, R'_{n,p}(a)\,, \tag{22}$$

si trova:

$$T_{n,p} = \delta\,[R_{n,p}(b)]^2 - \alpha\,[R_{n,p}(a)]^2 + (\gamma - \beta)\, R_{n,p}(a)\, R_{n,p}(b)$$

e quindi:

$$|T_{n,p}| \leqq P\,[R_{n,p}(a)]^2 + Q\,[R_{n,p}(b)]^2\,, \tag{23}$$

ove si è posto:

$$P = \left|\frac{\gamma - \beta}{2}\right| + |\delta|\,, \quad Q = \left|\frac{\gamma - \beta}{2}\right| + |\alpha|\,.$$

5. Osserviamo ora che si ha:

$$[R_{n,p}(a)]^2 = [R_{n,p}(x)]^2 - 2\int_a^x R_{n,p}(\xi)\, R'_{n,p}(\xi)\, d\xi \qquad (a \leq x \leq b)\,.$$

(¹) Presentata nella seduta del 1° luglio 1923.

(²) Vedasi la Nota precedente in questi Rendiconti, pag. 145.

e, per la *disuguaglianza di Schwarz*:

$$[R_{n,p}(a)]^2 \leqq [R_{n,p}(x)]^2 + 2 \sqrt{\int_a^b [R_{n,p}(\xi)]^2 d\xi \cdot \int_a^b [R'_{n,p}(\xi)]^2 d\xi} .$$

Poichè x è un punto qualunque di (a, b), risulta ancora, indicando con m il minimo di $p(x)$ nell'intervallo (a, b):

$$[R_{n,p}(a)]^2 \leqq \frac{1}{m(b-a)} \int_a^b p(x) [R_{n,p}(\xi)]^2 d\xi + \\ + \frac{2}{\sqrt{m}} \sqrt{\int_a^b p(\xi) [R_{m,p}(\xi)]^2 d\xi \cdot \int_a^b [R'_{m)p}(\xi)]^2 d\xi}$$

e, per le (11) e (15):

$$(24) \qquad [R_{n,p}(a)]^2 \leqq \frac{M}{m(b-a)} + 2 \sqrt{\frac{M}{m}} \cdot \sqrt{I_{n,p}} .$$

Analogamente si trova:

$$(25) \qquad [R_{n,p}(b)]^2 \leqq \frac{M}{m(b-a)} + 2 \sqrt{\frac{M}{m}} \cdot \sqrt{I_{n,p}} .$$

Dalle (23), (24), (25) si deduce:

$$(26) \qquad |T_{n,p}| \leqq \frac{M(P+Q)}{m(b-a)} + 2(P+Q) \sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{I_{n,p}} .$$

6. Tornando ora alla (13), e tenendo conto delle (18), (22), (26), si ha, qualunque siano n e p:

$$(27) \qquad I_{n,p} - 2\overline{M} \sqrt{I_{n,p}} - \overline{N} - \left| \sum_{n+1}^{n+p}{}_k \mathcal{A}_k B_k^2 \right| \leqq 0 ,$$

ove si è posto:

$$\overline{M} = (P+Q) \sqrt{\frac{M}{m}} , \quad \overline{N} = \frac{M(P+Q)}{m(b-a)} + \frac{M(N+1)}{2} .$$

Se ne deduce:

$$\sqrt{I_{n,p}} \leqq \overline{M} + \sqrt{\overline{M}^2 + \overline{N} + \left| \sum_{n+1}^{n+p}{}_k \mathcal{A}_k B_k^2 \right|} ,$$

e quindi:

$$\sqrt{I_{n,p} \cdot \sum_{n+1}^{n+p}{}_k B_k^2} \leqq \overline{M} \sqrt{\sum_{n+1}^{n+p}{}_k B_k^2} + \sqrt{\left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k B_k^2\right)\left(\overline{M}^2 + \overline{N} + \left| \sum_{n+1}^{n+p}{}_k \mathcal{A}_k B_k^2 \right|\right)}$$

donde segue senz'altro che, nell'ipotesi sopra detta, espressa dalla (19), la condizione del teorema enunciato nel § 2 è soddisfatta, se è soddisfatta la (8), in particolare se è soddisfatta la (9).

7. Passiamo al caso in cui:

$$a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0, \tag{28}$$

senza che sia nulla nessuna delle quantità a_2, a_4, b_2, b_4.

Le (2) divengono, in tal caso, per la condizione (3):

$$\left\{\begin{array}{l} a_4 \, U_k(a) + a_2 \, U_k(b) = 0 \\ a_1 \, U_k(a) + a_2 \, U'_k(a) + a_3 \, U_k(b) + a_4 \, U'_k(b) = 0 \end{array}\right. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

Riprendendo la (22), e tenendo conto delle (29), alle quali soddisfano le (5), se ne deduce:

$$a_2 \, T_{n,p} = a_1 [R_{n,p}(a)]^2 + a_3 \, R_{n,p}(a) \, . \, R_{n,p}(b),$$

e quindi:

$$|T_{n,p}| \leqq P_1 [R_{n,p}(a)]^2 + Q_1 [R_{n,p}(b)]^2, \tag{30}$$

ove si è posto:

$$P_1 = \frac{2|a_1| + |a_3|}{2|a_2|}, \quad Q_1 = \frac{|a_3|}{2|a_2|}.$$

Infine, dalle (24), (25), (30) si trae:

$$|T_{n,p}| \leqq \frac{M(P_1 + Q_1)}{m(b-a)} + 2(P_1 + Q_1) \sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{I_{n,p}}. \tag{31}$$

Dopo ciò, se nelle considerazioni del precedente paragrafo si sostituisce alla disuguaglianza (26) la disuguaglianza (31), si arriva alla conclusione che la serie (7) converge uniformemente, sotto la condizione (8), in particolare sotto la condizione (9), anche nel caso in cui, senza che sia nulla nessuna delle quantità a_2, a_4, b_2, b_4, risulta verificata la (28).

8. Ferma restando l'ipotesi espressa dalla (28), ammettiamo ora che non tutte le quantità a_2, a_4, b_2, b_4 siano diverse da zero. Distinguiamo i quattro casi:

$$a_2 = a_4 = 0 \tag{32}$$

$$a_2 = b_2 = 0 \tag{33}$$

$$a_4 = b_4 = 0 \tag{34}$$

$$b_2 = b_4 = 0, \tag{35}$$

e consideriamo le condizioni:

$$a_1 b_2 - a_3 b_4 = 0 \tag{36}$$

$$a_3 b_4 - a_4 b_3 = 0 \tag{37}$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \tag{38}$$

$$a_2 b_1 - a_4 b_3 = 0, \tag{39}$$

alle quali, corrispondentemente alle (32), (33), (34), (35), dà luogo la (3).

Se le quantità, che figurano nelle (36), (37), (38), (39), sono tutte diverse da zero, le condizioni ai limiti (2) assumono rispettivamente le seguenti forme:

$$(40)\quad \begin{cases} a_1\,U_k(a) + a_3\,U_k(b) = 0 \\ \lambda b_1\,U_k(a) + a_3\,U'_k(a) + \lambda b_3\,U_k(b) + a_1\,U'_k(b) = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ \dfrac{a_3}{b_2} = \dfrac{a_1}{b_4} = \lambda \end{matrix}\right)$$

$$(41)\quad \begin{cases} U_k(a) = 0 \\ \mu\,U_k(b) + U'_k(b) = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ \dfrac{a_3}{a_4} = \dfrac{b_3}{b_4} = \mu \end{matrix}\right)$$

$$(42)\quad \begin{cases} U_k(b) = 0 \\ \nu\,U_k(a) + U'_k(a) = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \nu \end{matrix}\right)$$

$$(43)\quad \begin{cases} a_4\,U_k(a) + a_2\,U_k(b) = 0 \\ a_1\,U_k(a) + a_2\,U'_k(a) + a_3\,U_k(b) + a_4\,U'_k(b) \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se invece le quantità che figurano nelle (36), (37), (38), (39) non sono tutte diverse da zero, sono possibili per le condizioni (2) queste cinque differenti forme:

$$\left.\begin{array}{ll} (44) & U_k(a) = 0\,,\ b_3\,U_k(b) + b_4\,U'_k(b) = 0 \\ (45) & U_k(a) = 0\,,\ U'_k(b) = 0 \\ (46) & U_k(b) = 0\,,\ b_1\,U_k(a) + b_2\,U'_k(a) = 0 \\ (47) & U_k(b) = 0\,,\ U'_k(a) = 0 \\ (48) & U_k(a) = 0\,,\ U_k(b) = 0 \end{array}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Le (43) coincidono colle (29), e le (40), (41), (42), (44), (46) ne sono dei casi particolari: per esse valgono dunque le considerazioni del § 7. Delle condizioni rimanenti, le (45) e (47) rientrano parimenti come casi particolari nelle (29), ma per esse si ha senz'altro:

$$(49)\qquad T_{n,p} = 0\,,$$

ed il medesimo si verifica per le (48).

Dalle (13), (18), (22), (49) risulta:

$$I_{n,p} \leqq \left| \sum_{n+1}^{n+p}{}_k\, \mathcal{A}_k\, B_k^2 \right| + \frac{M(N+1)}{2}\,,$$

e se ne deduce ancora che la condizione del teorema del § 2 è soddisfatta, se è soddisfatta la (8), in particolare se è soddisfatta la (9). Resta così pienamente dimostrato quanto è stato in principio asserito.