ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Meccanica. — *Sul raffreddamento terrestre*. Nota di FRANCESCO SBRANA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

1. Proseguendo lo studio che abbiamo iniziato in una Nota precedente, per giungere ad un apprezzamento del fenomeno del raffreddamento terrestre [2], supponiamo che la massa sferica si comporti come un fluido viscoso, e che il baricentro del corpo perturbante si sposti, attorno ad essa, con moto circolare uniforme. Formiamo quindi, nel modo già detto, la corrispondente *funzione di dissipazione*, che misura l'energia perduta dall'unità di volume nell'unità di tempo, per effetto della viscosità. Se di questa funzione calcoliamo l'integrale esteso a tutto lo spazio occupato dalla sfera, (che rappresenta la perdita globale di energia nell'unità di tempo), otteniamo una quantità costante.

Su questa ricerca (che fu proposta dal prof. Lo Surdo) torneremo prossimamente per indicare alcuni apprezzamenti numerici.

2. Scelto come piano xy il piano del cerchio descritto da C, e detta ω la velocità angolare (costante) di C, possiamo supporre che le coordinate ξ, η, ζ di questo punto siano legate al tempo dalle relazioni

$$\xi = \mathrm{D}\cos \omega t\,,\ \eta = \mathrm{D}\,\mathrm{sen}\,\omega t\,,\ \zeta = 0\,.$$

Dobbiamo ora considerare la funzione

$$\Phi = \lambda_1 \theta'^2 + \mu_1 \{2a'^2 + 2b'^2 + 2c'^2 + f'^2 + g'^2 + h'^2\}\,,$$

dove λ_1 e μ_1 sono le due costanti di viscosità,

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}\,,\ b = \frac{\partial v}{\partial y}\,,\ c = \frac{\partial w}{\partial z}\,;\ \theta = a + b + c\,;$$

$$f = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\,,\ g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\,,\ h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,,$$

e gli accenti indicano derivazione rispetto al tempo.

Osservando che $\frac{\partial \Omega'}{\partial z} = 0$, si ottiene

$$(1)\qquad \begin{cases} a' = a_1 \Omega' + (a_1 + 2a_2)\, x \dfrac{\partial \Omega'}{\partial x} + (a_2 r^2 + a_3) \dfrac{\partial^2 \Omega'}{\partial x^2}\,, \\ b' = a_1 \Omega' + (a_1 + 2a_2)\, y \dfrac{\partial \Omega'}{\partial y} + (a_2 r^2 + a_3) \dfrac{\partial^2 \Omega'}{\partial y^2}\,, \\ c' = a_1 \Omega'\,; \end{cases}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1923.

(2) *Sopra un problema di statica elastica suggerito dal raffreddamento della Terra*, Rend. Lincei, 1923, 2° sem., fasc. 1°-2°.

$$(2)\qquad \begin{cases} f' = (a_1 + 2a_2)\, z \dfrac{\partial \Omega'}{\partial y}\,, \\[2mm] g' = (a_1 + 2a_2)\, z \dfrac{\partial \Omega'}{\partial x}\,, \\[2mm] h' = (a_1 + 2a_2) \left(x \dfrac{\partial \Omega'}{\partial y} + y \dfrac{\partial \Omega'}{\partial x} \right) + 2 (a_2 r^2 + a_3) \dfrac{\partial^2 \Omega'}{\partial x \, \partial y}\,; \end{cases}$$

per conseguenza (¹)

$$(3)\qquad \Phi = \{ \lambda_1 (5a_1 + 4a_2)^2 + 2\mu_1 [a_1 (7a_1 + 8a_2) + 2 (a_1 + 2a_2)^2] \} \, \Omega'^2 + \\ + \mu_1 (a_1 + 2a_2) \{ (a_1 + 6a_2) r^2 + 4a_3 \} \left[\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega'}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ + 4\mu_1 (a_2 r^2 + a_3) \left[\left(\frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right].$$

Posto poi

$$x = r \operatorname{sen} \tau \cos \varphi \,,\; y = r \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} \varphi \,,\; z = r \cos \tau \,,$$

e detto S lo spazio occupato dalla sfera, dalle uguaglianze

$$\Omega' = \frac{3\gamma \mathrm{M} \omega}{2\mathrm{D}^3} \, r^2 \operatorname{sen}^2 \tau \operatorname{sen} 2 (\omega t - \varphi)\,,$$

$$\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega'}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{3\gamma \mathrm{M} \omega}{\mathrm{D}^3} \right)^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \tau \,.$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x \, \partial y} \right)^2 = \left(\frac{3\gamma \mathrm{M} \omega}{\mathrm{D}^3} \right)^2 ,$$

risulta chiaramente che l'integrale

$$\int_{\mathrm{S}} \Phi \, d\mathrm{S} = \int_0^{\mathrm{R}} dr \int_0^{\pi} d\tau \int_0^{2\pi} \Phi \, r^2 \operatorname{sen} \tau \, d\varphi$$

è costante.

(¹) Si noti che $\theta = (5a_1 + 4a_2)\, \Omega$; inoltre

$$\frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial y^2} = 0 \,;\; x \frac{\partial \Omega'}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega'}{\partial y} = 2\Omega' \,;$$

$$x \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x^3} + y \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \Omega'}{\partial x} \,;\; x \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial y^2} = \frac{\partial \Omega'}{\partial y} \,.$$