ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

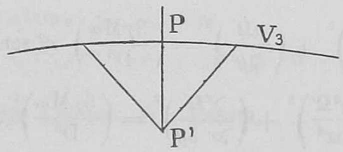
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Relatività. — *Sul significato fisico della seconda forma fondamentale in relatività.* Nota di ENRICO PERSICO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

Delle due forme differenziali quadratiche, cosiddette fondamentali, che intervengono nella teoria delle superficie, l'una (l'elemento lineare) ha, come è noto, nella teoria della relatività generale, un'interpretazione fisica di capitale importanza; l'altra (che si presenta nello studio delle superficie considerate non intrinsecamente, ma in rapporto allo spazio ambiente) non è stata ancora considerata nella relatività: recentemente il prof. Bompiani [2], estendendone la teoria, ha posto la questione del suo significato fisico. Le brevi considerazioni che seguono mostreranno che, mentre in un dato sistema di riferimento, il quadrato dell'elemento lineare *spaziale* caratterizza, come si sa, le proprietà *geometriche* dello spazio, la seconda forma quadratica dello spazio (considerato immerso nella varietà spazio-tempo) ha un significato che si ricollega invece colle proprietà *ottiche.*



Lo spazio in un dato istante si può pensare come una ipersuperficie V_3 (di cui diremo dl^2 il quadrato dell'elemento lineare, riservando la notazione ds^2 a quello quadridimensionale) immersa nell'universo V_4: dette x_1, x_2, x_3, le coordinate spaziali e $x_0 = ct$ quella temporale, la V_3 in questione sarà una delle ipersuperficie $x_0 = \text{cost.}$ Poichè la seconda forma fondamentale ha rapporto con la configurazione di V_3 in quanto immersa in V_4, dovremo prendere le mosse da un elemento caratteristico di questa configurazione: consideriamo dunque dapprima la direzione normale a V_3, e ricerchiamone il significato fisico. Limitandoci alla considerazione di un intorno di primo ordine, potremo trattare l'universo come euclideo e ricorrere alla consueta rappresentazione grafica in due dimensioni. Sia PP' un segmento infinitesimo

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1923.

[2] Atti del R. Ist. Veneto, t. LXXX, p. 1113, (1920-21).

normale a V_3: consideriamolo come parte della linea oraria di un punto materiale mobile, e supponiamo poi che esso, nell'istante corrispondente alla posizione P', emetta un'onda luminosa, che sarà rappresentata geometricamente dal noto ipercono col vertice in P'. Per proprietà geometriche elementari la sezione di questo ipercono con la V_3 è una sfera col centro in P e raggio PP' (nel senso che tutti i suoi punti hanno da P la stessa distanza, uguale a PP'). Potremo dunque dire che la direzione normale a V_3 è caratterizzata dal fatto che, se un punto luminoso la ha per linea oraria, esso resta, per un tempo infinitesimo, al centro delle onde che emette. Nella Relatività ristretta questa proprietà compete ai punti luminosi *fermi* (rispetto al riferimento che si è fissato): altrettanto avviene in Relatività generale ogni qualvolta le linee x_0 sono normali alle ipersuperficie $x_0 =$ cost. cioè coincidono con la direzione PP': allora, come osservò per altra via il prof. Levi-Civita [1], la propagazione della luce è un fenomeno reversibile. Ma se quella ortogonalità non ha luogo (basta pensare, p. es., al caso di un sistema in rotazione uniforme, cfr. Laue, *Relativitätstheorie*, II, p. 162), allora, perchè un punto luminoso resti per un tempo infinitesimo al centro delle proprie onde, esso deve essere animato da una certa velocità, ben determinata per ogni punto dello spazio e per ogni istante. Per brevità diremo che un tal punto è *otticamente fermo*. Le linee orarie dei punti otticamente fermi sono le traiettorie ortogonali delle ipersuperficie $x_0 =$ cost. Se chiamiamo Y la tetravelocità di uno di tali punti (vale a dire un vettore unitario perpendicolare allo spazio $x_0 =$ cost.), possiamo facilmente trovare i seguenti valori per le sue componenti covarianti e controvarianti

$$Y_i = 0 \quad , \; Y_0 = \frac{1}{\sqrt{g^{00}}}$$
$$(i = 1\,, 2\,, 3).$$
$$Y^i = \frac{g^{i0}}{\sqrt{g^{00}}} \quad , \; Y^0 = \sqrt{g^{00}}$$

Da queste si possono poi avere immediatamente le tre componenti della velocità spaziale, che sono

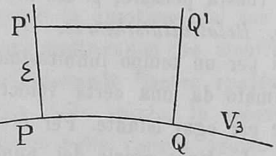
$$q^i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{c g^{0i}}{g^{00}} \qquad (i = 1\,, 2\,, 3).$$

Dividendo queste quantità per $\sqrt{g_{00}}$ si avrebbe la velocità riferita al tempo proprio contato lungo la linea oraria x_0 passante per p.

Siamo così condotti ad associare ad ogni punto dello spazio un punto materiale (fittizio) animato da una certa velocità, determinabile con espe-

[1] *La teoria di Einstein e il principio di Fermat*, Nuovo Cimento, vol. XVI, 1918, pp. 105-114.

rienze ottiche, ovvero, per adoperare il linguaggio dell'idrodinamica, a considerare lo spazio come riempito di un *mezzo continuo* di cui si può sperimentalmente determinare il movimento. Questo fluido fittizio gode, come risulta da quanto precede, di questa proprietà caratteristica: se una sua particella, in un dato istante, emette una vibrazione luminosa, dopo un tempo infinitesimo $d\tau$ la superficie d'onda è (a meno di infinitesimi d'ordine superiore) una sfera (di raggio $cd\tau$ se τ è il *tempo proprio*) al cui centro si trova la stessa particella che ha emesso la luce: proprietà, come si vede facilmente, che competerebbe ad un fluido reale il quale propagasse effettivamente la luce con velocità c, trascinandola nel suo movimento. In altre parole, se l'osservatore eseguisse delle esperienze di ottica per studiare la propagazione della luce rispetto al prefissato sistema x_0, x_1, x_2, x_3, avrebbe l'illusione che la luce si propagasse in un etere, di cui anzi potrebbe determinare sperimentalmente la velocità punto per punto e istante per istante (¹).



Consideriamo ora in un dato istante due particelle del mezzo otticamente fermo, infinitamente vicine, e calcoliamo la loro velocità mutua di allontanamento, cioè la velocità con cui cresce la loro distanza spaziale. Siano P e Q le due particelle nell'istante considerato: il sistema di quiete della particella P avrà per asse del tempo la normale a V_3. Lasciamo trascorrere un tempuscolo $d\tau$ (tempo proprio di P) dopo il quale il punto rappresentativo di P si troverà in P', a una distanza $\varepsilon = cd\tau$ da P, e quello di Q in Q': sarà $P'Q' \perp PP'$, e, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, $QQ' = \varepsilon$; sia ds' la distanza P' Q'. La velocità d'allontanamento che ricerchiamo è definita dall'espressione

$$\chi = \frac{ds' - ds}{d\tau}. \tag{1}$$

Ora, il Bianchi (²) definisce la seconda forma fondamentale ψ (nei differenziali dx_1, dx_2, dx_3) dell'ipersuperficie mediante la relazione

$$ds'^2 - ds^2 = -2\varepsilon\psi$$

(¹) Sul modo di prefissare il sistema di riferimento cfr. E. Persico, questi Rend., XXXII, 5, pag. 524 (1923). Un particolare modo di fissarlo è stato studiato dal Caner, e corrisponde ad assumere *localmente* il tempo perpendicolare allo spazio, cioè a riferirsi a una *particella* del fluido otticamente fermo.

(²) *Lezioni di geometria differenziale*, II ed., vol. I, p. 359.

dalla quale si ha subito

$$\frac{ds'}{ds} = 1 - \frac{\varepsilon\psi}{ds^2} = 1 - \frac{c\,\psi}{ds^2}\,d\tau\,.$$

Sostituendo nella (1) si ricava:

$$\chi = -\frac{c\,\psi}{ds}\,.$$

Questa formula ci dice che la forma quadratica ψ rappresenta, a meno del fattore $\frac{-ds}{c}$ la velocità mutua d'allontanamento di due punti otticamente fermi, a distanza ds.

Di qui segue anche facilmente la seguente caratterizzazione fisica delle *direzioni principali* e delle *direzioni asintotiche* dello spazio; se intorno a un punto otticamente fermo P si porta, in ciascuna direzione, un segmento (infinitesimo) inversamente proporzionale alla radice quadrata della velocità con cui si allontana da P quel punto otticamente fermo Q, che si trova in quella direzione alla distanza (fissata) ds, si ottiene una quadrica, col centro in P, i cui assi indicano le direzioni principali, mentre il cono asintotico (se esiste) fornisce le direzioni asintotiche dello spazio.

Se la V è una ipersuperficie geodetica, la ψ è identicamente nulla, e viceversa; in tal caso $\chi = 0$, e quindi il mezzo otticamente fermo appare animato solamente da un moto d'insieme.

Fisica. — *Sulla emissione termoionica.* Nota di A. Pontremoli, presentata dal Socio O. M. Corbino [1].

Il Dushman [2], partendo dalla seconda legge della termodinamica e considerando l'emissione termoionica come equivalente alla evaporazione di un gas monoatomico, è recentemente riuscito a dimostrare la nota relazione di Richardson secondo cui l'intensità della corrente termoionica di saturazione I è data da

$$\mathrm{I} = \mathrm{AT}^2\, e^{-\frac{b_0}{\mathrm{T}}}$$

dove T è la temperatura assoluta, A e b_0 sono costanti di evidente significato fisico ma determinabili per ogni metallo solo con l'esperienza.

Il Dushman è inoltre pervenuto, come conseguenza della sua teoria, a fissare che A è uguale per tutti gli elementi, funzione di costanti univer-

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1923.

[2] Dushman, Phys. Rev., 21, pag. 623. 1923; vedi ivi anche Note bibliografiche sul problema.