

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA NAZIONALE  
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.



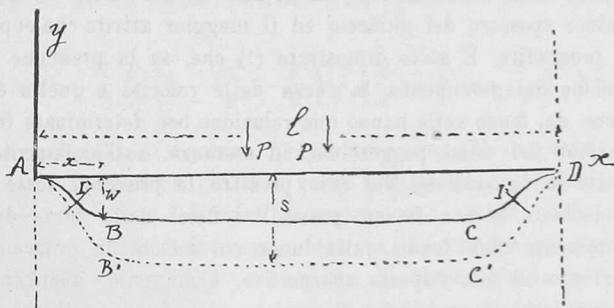
ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

**Fisica terrestre.** — *Per l'interpretazione fisica di alcune curve di velocità nel moto di discesa dei ghiacciai* <sup>(1)</sup>. Nota di EMILIO ODDONE, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Il sig. J. Vallot, direttore dell'Osservatorio del Monte Bianco, nel suo grande lavoro « Expériences sur la marche et les variations de la Mer de glace <sup>(2)</sup> » ha, per primo, fatto osservare che nel moto di discesa di un ghiacciaio, la velocità superficiale aumenta bruscamente dai bordi laterali morenici verso le parti mediane del ghiacciaio dove il movimento diventa pressochè uguale; e che le curve di velocità, lungo una sezione trasversale del ghiacciaio, anzichè avere la forma propria alle curve di velocità superficiali dei fluidi vischiosi che scorrono nei canali a regolare sezione ed inclinazione <sup>(3)</sup>, hanno soventi la forma concoidale indicata nella fig. 1<sup>a</sup>.



(Fig. 1).

La linea ABCD rappresenta una curva di velocità superficiale, che è bensì convessa verso valle attraverso a gran parte della sezione (tratto BC della figura), ma presso i bordi, nei tratti AI e DI' è convessa verso l'alto, fino a tangenziare la linea di profilo AD.

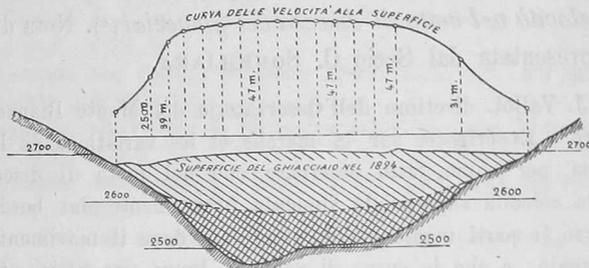
Quale interpretazione si è data a questi flessi?

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel R. Ufficio Centrale di Meteorologia e di Geodinamica. Roma, gennaio 1923. Presentato nella seduta del 1° giugno 1923.

<sup>(2)</sup> Annales de l'Observatoire Météor. Physique et Glaciaire du Mont Blanc, tomo IV, 1900.

<sup>(3)</sup> Tali curve hanno un aspetto paraboloidico e talora iperbolico.

Riproduco dal classico volume « Die Gletscher » Braunschweig, F. Vieweg, 1904, autore l'illustre glaciologo Dr. Hans Hess, la figura 2 seguente, la quale interpreta i flessi della curva delle velocità superficiali, come conseguenza di necessaria corrispondenza coll'andamento del profilo trasversale del fondo valle, occupato dal ghiacciaio. Se la curva del profilo di sezione possiede dei flessi, anche la curva delle velocità dovrà recare degli inflessi analoghi.



(Fig. 2).

Questa spiegazione è stata comprovata partendo dal dato di fatto che la velocità va diminuendo ai lati, ed accettando per causa di tale diminuzione il minor spessore del ghiaccio ed il maggior attrito che oppongono le sponde al progredire. È stato dimostrato <sup>(1)</sup> che, se la pressione non varia nella direzione del movimento, la curva delle velocità e quella del profilo della sezione del fondo valle hanno una relazione ben determinata fra loro <sup>(2)</sup>. La spiegazione dei flessi poggerebbe, in sostanza, sull'andamento trasversale del letto del ghiacciaio. Nel caso, peraltro, la pressione fosse variabile, restava a decidere se non fossero possibili i flessi nelle curve di velocità indipendentemente dal fondo valle lungo cui scende un ghiacciaio. Credo di essere giunto ad una risposta affermativa, e mi pare, anzi, che la mia dimostrazione rechi il contributo di qualche idea nuova nell'interpretazione fisica delle curve di velocità nel moto di discesa d'un ghiacciaio.

I ragionamenti che mi porteranno alla meta sono due. Col primo (vedi comma *a*) dimostro che nei ghiacciai si danno deformazioni elastiche che recano i flessi; col secondo (vedi comma *b*) dimostro che tali deformazioni elastiche portano col tempo a proporzionali deformazioni plastiche, che sono vere curve di velocità, dotate di flessi: con che avrò dimostrato l'assunto.

<sup>(1)</sup> C. Somigliana, *Sulla profondità dei ghiacciai*, Rendiconti R. Accademia dei Lincei, vol. XXX, 1° e 2° semestre 1921. Note I, II, III e IV.

<sup>(2)</sup> I risultati della teoria furono confermati da eleganti esperienze di laboratorio condotte dallo stesso prof. Somigliana nel gabinetto di fisica della R. Università di Torino. Assegnato al profilo trasversale del canale modello quel particolare andamento accennato, anche le curve di velocità del fluido vischioso assunsero quel particolare andamento.

a) Immagino tagliata nel ghiacciaio una lama di ghiaccio, limitata da due sezioni trasversali vicine, parallele tra di loro e normali alla linea di massima pendenza del ghiacciaio. Tale lastra di ghiaccio sarà come una paratoia gettata attraverso il fondo valle del ghiacciaio, fissa per tre lati, e cioè pei due lati di bordo e per il fondo. Sotto la componente del proprio peso, nonchè di quello che eventualmente può incomberle da tergo, tale paratoia tende a discendere, impedita peraltro la discesa dalla resistenza dei bordi. Ne segue una flessione della lastra, con comportamento analogo all'inflessione che, per proprio peso, assume una tavola orizzontale murata per tre lati ed eventualmente caricata.

La teoria elastica sa precisare le forze e le deformazioni suscitate nella tavola al variare delle dimensioni sue e dell'area di pressione del peso sovraincombente; sa fornire, in sostanza, l'espressione della cosiddetta *superficie elastica*.

Per dare un esempio, se la tavola è supposta di avere bordi incastrati semi-ellittici, dall'equazione:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e se è soggetta ad un carico uniforme  $p$ , l'equazione della superficie elastica vale:

$$(2) \quad w = -\frac{1}{8} \frac{p}{D} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 / \left( \frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right), \quad (1)$$

essendo  $D$  il coefficiente di flessione, *flexural rigidity*, *Biegungssteifigkeit*, ecc. Differenziando l'espressione (2), due volte rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , ed eguagliando a zero, si ottiene il luogo geometrico dove, nella tavola deformata, sorgeranno i flessi. Tale luogo è una linea corrente vicino agli orli e che, nel caso della paratoia di ghiaccio, costeggia i bordi ed il fondo del ghiacciaio. Nella fig. 1, essendo  $A B C D$  la traccia della paratoia deformata, i due inflessi laterali si scorgono come punti in  $I$  ed  $I'$ .

M'affretto ad aggiungere che nel ghiaccio tali deformazioni elastiche hanno valori estremamente piccoli. Non sempre conforme a quanto si insegna nelle scuole, il modulo di rigidità del ghiaccio ha valore discretamente alto ( $E = 2,8 \times 10^{10}$  C. G. S.). Nelle esperienze di laboratorio, si arriva quasi sempre alla frantumazione del ghiaccio quando ancora le deformazioni elastiche sono evanescenti. Ad esempio, avendo provato a caricare nel suo mezzo, col peso di 50 kg. ( $P = 5 \times 10^7$  dine) una delle solite colonne di ghiaccio che si trovano in commercio, della sezione  $\Omega = 15 \times 15$  cm<sup>2</sup>, stretti gli estremi in due colletti e sospesa la colonna con una campata  $l$  di 80 cm.,

(1) H. Love, *Lehrbuch der Elastizität*, Lipsia, 1907.

non riuscii a scorgere segni di flessione: nè poteva essere diversamente giacchè, in queste condizioni, nella formola statica che dà la freccia di flessione:

$$(3) \quad f = \frac{Pl^3}{192 EI} \left( 1 + \frac{120 I}{l^2 \Omega} \right)$$

sostituito alle lettere i dati numerici <sup>(1)</sup>, viene un  $f$  non maggiore di  $\frac{1}{600}$  di cm.! Assottigliando la sezione, la trave si spezzava anzichè incurvarsi!

Siano pur piccole queste deformazioni elastiche, esse svelano delle tensioni che nel loro contrasto colle forze di coesione sono regolatrici di equilibrio. Quando infatti la forza peso acquisterà decisivo predominio sulla reazione elastica, potranno sorgere presso i flessi tali forze di taglio da spezzare il ghiaccio al di qua ed al di là della linea neutra. I *crepacci marginali* sono indice di tale predominio. Trattasi di quelle profonde frangie o dentellature che dal contorno si spingono entro ghiaccio obliquamente rispetto l'asse longitudinale del ghiacciaio. La maggior parte delle fotografie dei ghiacciai illustrano queste frastagliature. A prima vista sembrano fosse, che l'acqua di fusione va allargando, ma desse si iniziarono come crepacci, e per avere la loro direzione circa normale ai due rami della curva A B C D della fig. 1 suggeriscono l'idea che siano stati probabilmente formati sotto l'azione della componente del peso, e di reazione elastica, due forze contrarie, costituenti forze di taglio, capaci di frantumare il ghiaccio presso i flessi.

b) Sotto queste forze di taglio spariscono i legami elastici che ritengono il ghiacciaio ai bordi, ed esso potrà scendere tutto d'un pezzo, come il signor J. Vallot ha osservato. Non sempre avverrà la rottura ai flessi; soventi si svolgerà un processo di disintegrazione più lento, per cui i cristalli di ghiaccio, presso i flessi, perdono di coesione e scorrono lentamente gli uni sugli altri. Nelle esperienze di laboratorio, il processo di apparente flessione può venire accelerato disponendo i parallelepipedi coll'asse ottico, od asse principale dei cristalli, orizzontale. In queste condizioni i costituenti del ghiaccio scorrono gli uni sugli altri, come le carte in un mazzo da ginoco.

In questo passaggio dalla deformazione elastica alla deformazione plastica, le formole statiche perdono del loro significato, ed andranno sostituite colle formole dinamiche e cioè coll' introduzione del coefficiente d'attrito  $\mu$  e della durata T del carico. Per citare un esempio, la formola (3) che dava

<sup>(1)</sup> I il Momento d'inerzia principale centrale di  $\Omega$  rispetto all'asse perpendicolare al piano di sollecitazione, quantità eguale, nel nostro caso, ad  $\frac{1}{12} \Omega^2$ .

la massima freccia elastica, si trasforma allora nell'espressione:

$$(4) \quad S = \frac{900 P \lambda T}{\mu \Omega}$$

dove S è la massima ordinata della deformazione plastica.

Nelle condizioni dell'esperienza sopra descritta alla colonna di ghiaccio, ponendo per  $\mu$  il suo valore di circa  $125 \times 10^{12}$  (8.000 volte la viscosità della pece), la formola dice che, ad avere un'ordinata di deformazione plastica eguale ad 1 cm., occorrerebbe un tempo T eguale a 25 giorni (1). Coll'asse ottico orizzontale il coefficiente d'attrito diventa 6000 volte minore ed il tempo s'accorcia d'altrettanto (2).

Sono queste deformazioni plastiche a dar luogo alle curve di velocità. Per quanto piccole sono incomparabilmente maggiori delle deformazioni dovute al fenomeno elastico e cioè maggiori delle impercettibili  $\omega$  elastiche della formola (2). Qui siamo arrivati nel vivo della questione:

Le velocità di discesa, nei singoli punti, sono proporzionali alle componenti del peso, computate lungo le traiettorie del moto, detratte le resistenze; sono quindi proporzionali alle originali deformazioni. Vigerà dunque proporzionalità tra i primitivi, per quanto invisibili, profili di deformazione semi-elastica A B C D e le successive, col tempo fatte ampie, appariscenti curve di velocità A B' C' D. Nelle parti mediane del profilo, dove è nulla la variazione  $d\omega$  della deformazione elastica lungo l'elemento  $dx$  della sezione, sarà pure nulla la variazione  $ds$  dell'avanzamento plastico rispetto  $dx$  ( $\frac{d\omega}{dx} = \frac{ds}{dx} = 0$ ).

Vicino ai bordi dove la deformazione elastica diminuisce con legge tale che i  $\frac{d^2\omega}{dx^2}$  passano dal valore positivo al negativo, costituendo il flesso, anche l'avanzamento diminuirà colla stessa legge. Nelle curve di velocità dovremo ritrovare ai bordi l'analogo flesso:  $\frac{d^2s}{dx^2} = 0$ .

Sono così arrivato a dare risposta affermativa a ciò che formava l'oggetto della nota, sapere cioè se la curva delle velocità può presentare dei flessi anche se il fondo valle ne è privo. La conclusione mia è che la curva delle velocità avrà flessi plastici ogniqualvolta la sezione trasversale del ghiacciaio potrà considerarsi così incastrata e caricata, da dare luogo in un primo tempo a deformazioni elastiche che prospettano flessi elastici.

Nel terminare la mia Nota, osservo che nel rilievo stereofotogrammetrico del fronte del ghiacciaio del Lys eseguito, con rara perizia, nel 1920, dall'Istituto Geografico Militare, su proposta del nostro Comitato glaciologico,

(1) Se nei ghiacciai si hanno velocità superficiali  $\frac{S}{T} = 0\text{cm},0005$  per sec. ben sensibili nelle 24 ore, ciò devesi, non tanto al fattore P della (4), quanto ai grandi valori che in natura spettano alle distanze dai bordi e dal fondo.

(2) R. M. Deeley, *The viscosity of Ice*, Proceed. R. Soc. of London, vol. LXXXI, 1908.

le linee di egual livello mostrano un andamento concoidale non dissimile dall'andamento della particolare curva di velocità che abbiamo studiato ed indicato alla fig. 1. Questa similitudine d'andamento deriva dal fatto che il profilo superficiale della sezione trasversale del ghiacciaio, caratterizzato dalla nota intumescenza mediana, fiancheggiata da due depressioni laterali, sta anch'esso in relazione colle dimensioni, pendenze ed attriti del ghiacciaio secondo le leggi della velocità e delle pressioni nel moto dei corpi plastici. Ne è stata data una dimostrazione (1).

**Mineralogia.** — *Antimonite di Selvena.* — Nota di MARIA DE ANGELIS (2), presentata dal Socio ARTINI.

In una escursione, fatta nel settembre 1919, il prof. E. Artini raccoglieva nei lavori delle gallerie Dainelli, poco sopra la miniera del Morone, entro al giacimento cinabrifero, parecchi esemplari di antimonite, che mi affidava poi per lo studio cristallografico.

Nei campioni studiati il minerale costituisce delle grosse vene o filoncelli, ed è accompagnato da molta calcite, spesso cristallizzata in minuti scalenoedri. L'antimonite forma individui prismatici, che possono raggiungere vari centimetri di lunghezza, con un diametro trasversale raramente superiore ai 5 o 6 millimetri, per lo più intrecciati fra loro abbastanza fittamente, così da lasciare soltanto dei vuoti angolosi piuttosto piccoli, entro ai quali sporgono minuti cristallini terminati da faccettine abbastanza nitide. Tredici di questi, scelti tra i meno imperfetti, furono sottoposti a misure goniometriche. Le forme osservate furono le seguenti:

{100}, {010}, {210}, {110}, {340}, {230}, {120}, {130}, {140}, {150}, {170},  
{101}, {103}, {111}, {343}, {353}, {213}, {223}, {233}, {113}, {123}.

Nessuna di queste forme è nuova per l'antimonite.

Il pinacoide {010} e il prisma {110} sono le forme più sviluppate della zona verticale; generalmente molto più ristrette le altre, le quali tuttavia in taluni cristalli possono presentare anche facce abbastanza larghe, però sempre fortemente striate parallelamente all'asse della zona. Costantemente presente, e talvolta abbastanza ampia, è la {103}; anche la {101} è frequentissima, e si può dire che manchi solo in rari cristalli.

(1) M. Michelier, *Sur les variations des glaciers des Pyrénées*, Annales du Bureau Météorol. de France, 1885.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo civico di Storia Naturale di Milano. Presentato nella seduta del 17 giugno 1923.