ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 novembre 1923.

V. Volterra, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Di una proprietà caratteristica delle congruenze di linee tracciate sulla sfera di raggio eguale ad 1.* Nota del Socio G. Ricci-Curbastro [1].

Si consideri una varietà a due dimensioni come definita metricamente dalla espressione

$$\varphi = a_{11}\, dx_1^2 + 2a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2$$

del suo ds^2, espressione, che assumeremo come forma fondamentale e il cui discriminante indicheremo con a. E siano $\lambda_{1/r}$ $\lambda_{2/r}$ i sistemi coordinati covarianti di due congruenze ortogonali di linee in essa tracciate ed orientate *canonicamente*, cioè in guisa che tra la direzione positiva della linea della prima e quella della linea della 2ª congruenza interceda un angolo retto da percorrere nello stesso senso per cui, attraverso un angolo, concavo, si passa dalla linea x_1 alla linea x_2. Sia di più φ_r il sistema coordinato covariante del fascio, cui le dette congruenze appartengono.

Valgono allora [2] le relazioni

$$\lambda_{1/rs} = \lambda_{2/r}\, \varphi_s \;;\; \lambda_{2/rs} = -\lambda_{1/r}\, \varphi_s$$
$$\Sigma_{rs}\, a^{(rs)}\, \overline{\varphi}_{rs} = \mathrm{G}\,,$$

G essendo l'invariante di Gauss relativo alla forma fondamentale.

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1923.

(2) Vedere Ricci e Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu* ecc., chap. IV, § 1 (Mathematische Annalen LIV Band).

Mentre dalle prime si traggono le

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \lambda_{1/12} - \lambda_{1/21} = \lambda_{2/1}\, \varphi_2 - \lambda_{2/2}\, \varphi_1 \\ \lambda_{2/12} - \lambda_{2/21} = \lambda_{1/2}\, \varphi_1 - \lambda_{1/1}\, \varphi_2 \end{cases}$$

all'ultima si può sostituire la

$$\varphi_{12} - \varphi_{21} = -\sqrt{a}\, G$$

o anche la

$$\text{(1')} \qquad \varphi_{12} - \varphi_{21} = G(\lambda_{1/1}\, \lambda_{2/2} - \lambda_{1/2}\, \lambda_{2/1}).$$

Ricordiamo che, designate con g_1 e g_2 le curvature geodetiche delle linee delle congruenze di sistemi coordinati $\lambda_{1/r}$ e $\lambda_{2/r}$ prese con segni opportuni, è

$$\text{(2)} \qquad \varphi_r = g_1\, \lambda_{1/r} + g_2\, \lambda_{2/r}\,.$$

Si ponga poi

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda_{1/1}\, dx_1 + \lambda_{1/2}\, dx_2 \\ u_2 &= \lambda_{2/1}\, dx_1 + \lambda_{2/2}\, dx_2 \\ u_3 &= \varphi_1\, dx_1 + \varphi_2\, dx_2\,, \end{aligned}$$

e si consideri la metrica della varietà, di cui ci occupiamo, come definita dalle due forme lineari indipendenti u_1 ed u_2 (1). Poichè per ogni sistema semplice covariante X_r e per ogni forma fondamentale valgono le relazioni

$$X_{rs} - X_{sr} = \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \frac{\partial X_s}{\partial x_r}\,,$$

alle relazioni (1) ed (1') del paragrafo precedente si possono sostituire le

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda_{1/1}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \lambda_{1/2}}{\partial x_1} = \lambda_{2/1}\, \varphi_2 - \lambda_{2/2}\, \varphi_1 \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda_{2/1}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \lambda_{2/2}}{\partial x_1} = \lambda_{1/2}\, \varphi_1 - \lambda_{1/1}\, \varphi_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = G\,(\lambda_{1/1}\, \lambda_{2/2} - \lambda_{1/2}\, \lambda_{2/1}), \end{cases}$$

delle quali le prime due ci danno φ_1 e φ_2 cioè determinano il fascio, cui appartengono le congruenze fondamentali, mentre l'ultima determina l'invariante di Gauss a questa relativo.

(1) Vedere Ricci, *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XIX della serie 5ª. Seduta del 20 febbraio 1916.

Chè se assieme ad u_1 e ad u_2 si considerano come date anche u_3 e G, nel sistema di equazioni (1) abbiamo le condizioni necessarie e sufficienti perchè sulla varietà V_3 generata dalle congruenze fondamentali u_1 ed u_2, il fascio, cui queste appartengono, sia dato dai coefficienti della forma u_3 e perchè la curvatura di V_2 sia eguale a G.

Si supponga ora $G = 1$ e che, come u_1 ed u_2, così anche u_1 ed u_3, u_2 ed u_3 siano fra loro linearmente indipendenti, il che, per le (2) equivale a dire che nessuna delle congruenze fondamentali sia geodetica.

In questo caso, e in questo caso soltanto, la sostituzione circolare $(u_1 u_2 u_3)$ non altera il sistema (1) e di conseguenza si ha che:

« Se tre forme lineari $u_1 u_2 u_3$ definiscono coi loro coefficienti i si-« stemi coordinati di due congruenze di linee nella varietà V_2 di curvatura « eguale ad 1 canonicamente orientate e quello del fascio, cui esse appar-« tengonono, la stessa cosa può dirsi delle terne $u_3 u_1 u_2$ ed $u_2 u_3 u_1$.

« Una tale proprietà è poi caratteristica della detta varietà ».

Meccanica. — *Influenza della viscosità sul moto di una massa liquida la cui superficie libera conserva la forma ellissoidale.* Nota del Socio corrispondente UMBERTO CISOTTI [1].

La viscosità di un liquido naturale in moto irrotazionale si manifesta nella distribuzione degli sforzi: precisamente, mentre, per il carattere potenziale del moto, nelle equazioni indefinite risultano nulli i termini dipendenti dalla viscosità (e quindi le equazioni sono le stesse che per i liquidi perfetti) tuttavia, in generale, non scompaiono i termini che contengono il coefficiente di viscosità nelle formule che definiscono gli sforzi [2]. Come esempio illustrativo ho precisato l'influenza smorzatrice della viscosità nelle onde semplici irrotazionali in un canale [3].

Ma anche per moti vorticosi (cioè non potenziali) può presentarsi analoga circostanza. In questa Nota mi propongo appunto di illustrare l'asserto, riprendendo in esame il classico problema di Dirichlet che, com'è noto, consiste nel determinare i possibili movimenti di una massa fluida incompressibile le cui particelle si attraggono secondo la legge di Newton, nella ipotesi

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1923.

[2] Cisotti, *Sulle equazioni del moto piano dei liquidi viscosi*, Rend. del R. Istituto Lombardo, vol. LVI (1923), pag. 107.

[3] Cisotti, *Sull'influenza della viscosità nei moti piani irrotazionali di liquidi naturali.* Questi Rendiconti, vol. XXXII (1° semestre 1923), pag. 21-26 e 85-88.