ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Chè se assieme ad u_1 e ad u_2 si considerano come date anche u_3 e G, nel sistema di equazioni (1) abbiamo le condizioni necessarie e sufficienti perchè sulla varietà V_3 generata dalle congruenze fondamentali u_1 ed u_2, il fascio, cui queste appartengono, sia dato dai coefficienti della forma u_3 e perchè la curvatura di V_2 sia eguale a G.

Si supponga ora $G = 1$ e che, come u_1 ed u_2, così anche u_1 ed u_3, u_2 ed u_3 siano fra loro linearmente indipendenti, il che, per le (2) equivale a dire che nessuna delle congruenze fondamentali sia geodetica.

In questo caso, e in questo caso soltanto, la sostituzione circolare $(u_1\, u_2\, u_3)$ non altera il sistema (I) e di conseguenza si ha che:

« Se tre forme lineari $u_1\, u_2\, u_3$ definiscono coi loro coefficienti i si-
« stemi coordinati di due congruenze di linee nella varietà V_2 di curvatura
« eguale ad 1 canonicamente orientate e quello del fascio, cui esse appar-
« tengonono, la stessa cosa può dirsi delle terne $u_3\, u_1\, u_2$ ed $u_2\, u_3\, u_1$.

« Una tale proprietà è poi caratteristica della detta varietà ».

Meccanica. — *Influenza della viscosità sul moto di una massa liquida la cui superficie libera conserva la forma ellissoidale.* Nota del Socio corrispondente Umberto Cisotti [1].

La viscosità di un liquido naturale in moto irrotazionale si manifesta nella distribuzione degli sforzi: precisamente, mentre, per il carattere potenziale del moto, nelle equazioni indefinite risultano nulli i termini dipendeuti dalla viscosità (e quindi le equazioni sono le stesse che per i liquidi perfetti) tuttavia, in generale, non scompaiono i termini che contengono il coefficiente di viscosità nelle formule che definiscono gli sforzi [2]. Come esempio illustrativo ho precisato l'influenza smorzatrice della viscosità nelle onde semplici irrotazionali in un canale [3].

Ma anche per moti vorticosi (cioè non potenziali) può presentarsi analoga circostanza. In questa Nota mi propongo appunto di illustrare l'asserto, riprendendo in esame il classico problema di Dirichlet che, com'è noto, consiste nel determinare i possibili movimenti di una massa fluida incompressibile le cui particelle si attraggono secondo la legge di Newton, nella ipotesi

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1923.

[2] Cisotti, *Sulle equazioni del moto piano dei liquidi viscosi*, Rend. del R. Istituto Lombardo, vol. LVI (1923), pag. 107.

[3] Cisotti, *Sull'influenza della viscosità nei moti piani irrotazionali di liquidi naturali*. Questi Rendiconti, vol. XXXII (1° semestre 1923), pag. 21-26 e 85-88.

che la superficie conservi la forma ellissoidale e sia sottoposta a pressione costante (1).

Dirichlet assume, in sostanza, come punto di partenza della trattazione del problema, l'ipotesi che le componenti cartesiane della velocità di una generica particella, in un istante generico, sieno funzioni lineari delle coordinate cartesiane della posizione acquisita, allo stesso istante, dalla particella (*ipotesi della linearità*) e suppone il fluido *perfetto*.

Che avviene se *si tiene conto anche della viscosità del fluido*?

E' stato osservato (2) che l'ipotesi della linearità rende nulli quei termini delle equazioni indefinite che dipendono dalla viscosità e ciò è vero, come constateremo anche noi, ma *non è lecito trarne senz'altro la conclusione che per i liquidi viscosi le cose vanno come per i liquidi perfetti.* Poichè — come mi propongo di mostrare — la viscosità interviene effettivamente nel regolare la distribuzione degli sforzi; in particolare essa si palesa anche negli sforzi che si esplicano sugli elementi della superficie che limita una qualsiasi massa liquida e che *non sono puramente normali* (come nei fluidi perfetti). Giova riflettere su di questa circostanza che permette di intravvedere fin d'ora l'influenza della viscosità nel problema di Dirichlet.

E in vero, secondo questo problema la predetta superficie, limitante la massa fluida, deve conservare forma ellissoidale ed essere sottoposta a pressione di valore costante e (naturalmente, ammessa l'ipotesi di fluido perfetto) *diretta in ogni punto normalmente alla superficie.* Se si tratta di liquido viscoso e si vogliono mantenere le condizioni imposte da Dirichlet, cioè la conservazione durante il moto della forma ellissoidale della superficie contorno, sottoposta in ogni punto a *pressione normale* (oltrechè uniforme) si giunge alla conclusione che *i moti, conciliabili colle condizioni di Dirichlet, si riducono a soli moti rigidi* e quindi, per quanto è noto (3), a moti rototraslatori uniformi. Va rilevato che questa conclusione è indipendente dal valore del coefficiente di viscosità della massa liquida ed è subordinata unicamente alla sua natura viscosa. Ciò assume particolare interesse se si riflette all'originaria questione planetaria a cui si riattaccano i lavori di Dirichlet e degli altri autori citati.

(1) E' quasi superfluo di rammentare che questo problema è originato dallo scopo di dare una giustificazione della attuale forma dei pianeti, supponendo che inizialmente essi si trovassero allo stato fluido. E' noto che oltre i contributi dovuti a Dirichlet stesso si hanno le classiche ricerche di Riemann e di altri autori: Dedekind, Betti, Brioschi, Padova, Basset, Greenhill, Tedone e quelle più recenti di Stekloff, Boggio, Guglielmi.

(2) Tedone, *Il moto di un ellissoide fluido secondo l'ipotesi di Dirichlet* (Tesi presentata alla R. Scuola Normale Superiore di Pisa: Pisa, Nistri, 1894, pag. 26).

(3) Cisotti, *Sui moti rigidi di una massa fluida limitata.* [Questi Rendiconti, vol. XXV, (1° sem. 1916), pag. 635].

Nelle giustificazioni che seguono mi valgo del calcolo vettoriale omografico [1], essendo questo il mezzo più indicato per la trattazione della questione [2]; avrò cura tuttavia di esprimere, a mano a mano, anche le corrispondenti espressioni cartesiane.

1. — Sia unitaria la densità costante del liquido e designi ν il coefficiente di viscosità. Introduciamo: il valore p della pressione che, *caeteris paribus*, corrisponderebbe allo stato fluido perfetto ($\nu = 0$), in un generico istante a una particella P; il potenziale U delle forze di massa. Le equazioni indefinite del moto del liquido sono, in forma vettoriale [3]:

l'equazione euleriana

$$\ddot{P} = \operatorname{grad}(U - p) + \nu \underset{2}{\triangle} \dot{P}, \tag{1}$$

e l'equazione di continuità

$$\operatorname{div} \dot{P} = 0, \tag{2}$$

designando $\dot{P}$ e $\ddot{P}$ le derivate, prima e seconda, di P rispetto al tempo t, cioè rispettivamente i vettori velocità e accelerazione, e $\underset{2}{\triangle}$ l'operatore cartesiano:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Se con Φ_n si segna lo sforzo specifico che si esercita sopra un elemento superficiale di raggio n, si ha [4]:

$$\Phi_n = p\, n - 2\nu \frac{d\,P}{dn} + \nu (\operatorname{rot} \dot{P}) \wedge n, \tag{3}$$

designando n il vettore unitario orientato come il raggio n.

2. — Seguendo l'ipotesi di Dirichlet, supponiamo che le componenti della velocità di una generica particella, in un determinato istante, sieno funzioni lineari delle coordinate cartesiane della posizione della particella nello stesso istante: questo vettorialmente si esprime scrivendo che la ve-

(1) C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, vol. I, Transformations linéaires, [Pavie, Mattei, 1912].

(2) Boggio, *Sul moto di una massa liquida che conserva la forma ellissoidale*, [Questi Rendiconti, vol. XXI, (2° sem. 1912), pag, 263]; e Guglielmi, *Sul moto vorticoso dei liquidi*, [Atti del R. Ist. Veneto, tom. LXXXI, (1922), pag. 311.

(3) C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, vol. II, Applications à la Mécanique et à la Physique, (Pavie, Mattei, 1913, pag. 62).

(4) C. Burali-Forti e R. Marcolongo, loco ultimo citato, pagg. 25 e 29.

locità $\dot{P}$ è funzione lineare del vettore $P - 0$, essendo 0 un punto, comunque prefissato della massa liquida, assumiamo cioè:

$$\dot{P} = \mathbf{v}_o + \alpha(P - 0), \tag{4}$$

ove α è un'omografia vettoriale e $\mathbf{v}_o$ un vettore, entrambi funzioni del tempo t e non di P (1). Risulta dalla (4) il significato cinematico di $\mathbf{v}_o$ quale velocità in 0. L'omografia α si può esprimere mediante un vettore ω e una dilatazione γ, entrambi funzioni di t, nel modo seguente (2)

$$\alpha = \gamma + \omega_\wedge, \tag{5}$$

per cui la (4) può scriversi

$$\dot{P} = \mathbf{v}_o + \omega_\wedge (P - 0) + \gamma (P - 0). \tag{4'}$$

Nella somma dei primi due termini riconosciamo un moto rigido generale, l'ultimo termine corrisponde a una pura deformazione.

Dalla (4') scendono facilmente le seguenti relazioni, che utilizzeremo tra poco:

$$\underset{2}{\Delta}\dot{P} = 0 \ , \ \operatorname{div}\dot{P} = \operatorname{div}\gamma(P - 0) = I_1\gamma = I_1\alpha \ (3) \ , \ \operatorname{rot}\dot{P} = 2\omega, \tag{6}$$

e per una generica direzione n,

$$\frac{d\dot{P}}{dn} = \omega_\wedge \frac{d(P - 0)}{dn} + \gamma \frac{d(P - 0)}{dn} = \omega_\wedge \boldsymbol{n} + \gamma \boldsymbol{n}, \tag{7}$$

essendo $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario, orientato come la direzione n.

(1) Se si introducono tre vettori unitari trirettangoli $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ e si pone

$$P - 0 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

x, y, z sono le coordinate di P rispetto a una terna cartesiana coll'origine in 0 e orientata come $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$. Allora l'espressione cartesiana dell'omografia α è la seguente

$$\alpha(P - 0) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\boldsymbol{i} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\boldsymbol{j} + (a_{31}x + a_{33}y + a_{32}z)\boldsymbol{k},$$

dove le a_{rs} sono funzioni della sola t.

(2) La constatazione cartesiana è facile. Tenendo presente la espressione cartesiana della omografia α e ponendo

$$2\omega = (a_{32} - a_{23})\boldsymbol{i} + (a_{13} - a_{31})\boldsymbol{j} + (a_{21} - a_{12})\boldsymbol{k};$$
$$2c_1 = a_{32} + a_{23} \ , \ 2c_2 = a_{13} + a_{31} \ , \ 2c_3 = a_{21} + a_{12},$$

risulta

$$\gamma(P - 0) = (a_{11}x + c_2z + c_3y)\boldsymbol{i} + (a_{22}y + c_3x + c_1z)\boldsymbol{j} + (a_{33}z + c_1y + c_2z)\boldsymbol{k}.$$

(3) Per la definizione cartesiana dell'omografia α si ha $I_1\alpha = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

3. — Per la prima delle (6), la equazione indefinita (1) diviene

$$\ddot{\mathrm{P}} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{U} - p)\,. \tag{8}$$

Dal confronto di questa colla (1) stessa risulta che la viscosità del liquido non interviene in modo esplicito nell'equazione (vettoriale) euleriana.

L'equazione di continuità (2) esige, per la seconda delle (6), che si abbia

$$\mathrm{I}_1\,\alpha = \mathrm{I}_1\,\gamma = 0\ (^1)\,. \tag{9}$$

Notiamo infine che, per l'ultima delle (6) e per la (7), la relazione (3) diviene

$$\boldsymbol{\Phi}_n = p\boldsymbol{n} - 2\nu\gamma\boldsymbol{n}\,, \tag{10}$$

Mette in rilievo questa relazione che *l'influenza della viscosità* [che abbiamo rilevato non manifestarsi nella (8)] *si rende palese nella legge che presiede alla distribuzione degli sforzi. Solamente quando è* $\gamma = 0$, anche gli sforzi risultano indipendenti dalla viscosità del liquido; ma in tal caso risulta dalla (4') che *il moto della massa liquida è rigido* (²).

4. — Introduciamo ora l'ipotesi che la superficie limitante la massa liquida sia un ellissoide di centro 0 e poniamo l'equazione dell'ellissoide sotto la forma vettoriale

$$f(\mathrm{P}\,,t) = (\mathrm{P} - 0) \times \beta(\mathrm{P} - 0) - 1 = 0\,, \tag{11}$$

in cui β è una dilatazione, funzione di t, i cui tre invarianti devono essere positivi (³). Se $\boldsymbol{n}$ rappresenta il vettore unitario normale all'ellissoide, in un generico suo punto P, rivolto verso l'interno, si ha

$$\boldsymbol{n} = -\frac{\mathrm{grad}\,f}{|\mathrm{grad}\,f|}\,,$$

(¹) La forma cartesiana di questa relazione è la seguente: $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

(²) E' intuitivo che viceversa se il moto della massa fluida è rigido la viscosità non ha modo di manifestarsi; l'accertamento si può fare del resto con tutto il rigore desiderabile. [Cfr. la Nota *Sui moti rigidi di una massa fluida limitata*, loc. citato].

(³) In forma cartesiana è

$$\beta(\mathrm{P} - 0) = (b_{11}\,x + b_{12}\,y + b_{13}\,z)\,\boldsymbol{i} + (b_{21}\,x + b_{22}\,y + b_{23}\,z)\,\boldsymbol{j} + (b_{31}\,x + b_{32}\,y + b_{33}\,z)\,\boldsymbol{k}\,,$$

dove $b_{rs} = b_{sr}$ sono funzioni di t, che caratterizzano ad ogni istante la configurazione ellissoidale. In quanto ai tre invarianti, le loro espressioni cartesiane sono le seguenti (Cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, vol. I, loco citato, pag. 149):

$$\mathrm{I}_1\,\beta = b_{11} + b_{22} + v_{33}\ ,\ \mathrm{I}_2\,\beta = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{33} & b_{31} \\ b_{13} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}\ ,\ \mathrm{I}_3\,\beta = \left\| b_{rs} \right\|,$$

In seguito a ciò, la (11) cartesianamente si esprime:

$$f(\mathrm{P}\,,t) = b_{11}\,x^2 + b_{22}\,y^2 + b_{33}\,z^2 + 2b_{23}\,yz + 2b_{31}\,zx + 2b_{12}\,xy - 1 = 0\,.$$

ovvero ricavandosi dalla (11) stessa,

$$\text{grad}\, f = 2\beta(\mathrm{P} - 0)\ (^1),$$

si può scrivere ancora

$$\boldsymbol{n} = -\frac{\beta(\mathrm{P} - 0)}{|\beta(\mathrm{P} - 0)|}\ . \tag{12}$$

5. — Esprimiamo infine che sulla superficie ellissoidica gli sforzi sono normali. In base alla (10) questa ipotesi esige che sulla detta superficie ellissoidica risulti

$$\gamma \boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n}\ ,$$

essendo λ una funzione (scalare) a priori indeterminata. Per la (12), la precedente può scriversi

$$(\gamma - \lambda)\,\beta(\mathrm{P} - 0) = 0\ . \tag{13}$$

Dovendo questa relazione risultare soddisfatta per ogni vettore $\mathrm{P} - 0$ soddisfacente alla (11), ed essendo positivi gli invarianti di β, risulta

$$\gamma = \lambda\ . \tag{14}$$

D'altra parte poichè λ è una funzione scalare, si ha $\mathrm{I}_1\,\gamma = 3\lambda$; ma per la (9) il primo membro di questa dev'essere nullo, quindi è pure $\lambda = 0$ e per la (14)

$$\gamma = 0\ (^2), \tag{15}$$

(1) In forma cartesiana basta rilevare che

$$\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} =$$

$$= 2(b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z)\boldsymbol{i} + 2(b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z)\boldsymbol{j} + 2(b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z)\boldsymbol{k} = 2\beta(\mathrm{P} - 0)\,.$$

(2) In forma cartesiana è

$$\begin{aligned}(\gamma-\lambda)\beta(\mathrm{P}-0) = {} & [(a_{11}-\lambda)(b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z)+c_2(b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z)+c_3(b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z)]\boldsymbol{i}+\\ & +[(a_{22}-\lambda)(b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z)+c_3(b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z)+c_1(b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z)]\boldsymbol{j}+\\ & +[(a_{33}-\lambda)(b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z)+c_1(b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z)+c_2(b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z)]\boldsymbol{k}\,;\end{aligned}$$

per cui la (13) esige l'annullarsi dei coefficienti di $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Eguagliando a zero questi coefficienti, dopo di avere raccolto i termini in x, y, z si ottengono le tre relazioni seguenti:

$$\begin{aligned}&[(a_{11}-\lambda)b_{11}+c_3b_{12}+c_2b_{13}]x+[(a_{11}-\lambda)b_{21}+c_3b_{22}+c_2b_{23}]y+[(a_{11}-\lambda)b_{31}+c_3b_{32}+c_2b_{33}]z=0\,,\\ &[c_3b_{11}+(a_{22}-\lambda)b_{12}+c_1b_{13}]x+[c_3b_{21}+(a_{22}-\lambda)b_{22}+c_1b_{23}]y+[c_3b_{31}+(a_{22}-\lambda)b_{32}+c_1b_{33}]z=0\,,\\ &[c_2b_{11}+c_1b_{12}+(a_{33}-\lambda)b_{13}]x+[c_2b_{21}+c_1b_{22}+(a_{33}-\lambda)b_{23}]y+[c_2b_{31}+c_1b_{22}+(a_{33}-\lambda)b_{33}]z=0\,.\end{aligned}$$

Dovendo queste essere soddisfatte per ogni terna di valori di x, y, z soddisfacente all'equazione dell'ellissoide, vanno annullati i singoli coefficienti di x, y, z : esprimendo

In tale circostanza dalla (4') scende che *il moto della massa liquida è rigido.*

Riferendosi a una Nota già citata (1) risulta poi che tutte le condizioni dinamiche risultano soddisfatte purchè il moto rigido abbia carattere uniforme.

Matematica. — *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale.* Nota del Corrispondente Guido Fubini (2).

Raccolgo in questo lavoro alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale, che sono forse degni di qualche interesse.

Riassumo anche, per maggior chiarezza, qualche risultato già noto mio e del Čech. Si tratta, essenzialmente, di risultati di vario genere, diretti a illuminare l'uno o l'altro capitolo di questo nuovo campo di ricerche geometriche.

§ 1. — *Retta principale.*

1. Comincio con l'enunciare un lemma che debbo a una comunicazione verbale del prof. Togliatti, che io avevo interpellato sul come si potesse generalizzare la retta dei flessi di una cubica raz. ad una *curva piana* C *di grado* $m+1$, *che abbia un punto* m^{uplo}. Questa generalizzazione ci sarà assai utile più avanti. Se $p_1 = 0, p_2 = 0, \ldots, p_m = 0$ sono le tangenti nel punto m^{uplo} si consideri il sistema lineare di curve piane determinato dalla C e dalle $p_i^{m+1} = 0$, ciascuna delle quali è formata da una delle tangenti p_i contata $m+1$ volte. In esso vi è generalmente una sola curva che si spezza nelle m tangenti $p_i = 0$ citate, e in una $(m+1)^{\text{esima}}$ retta, che diremo la *retta principale* della C (3).

---

ad esempio l'annullarsi dei coefficienti della prima delle precedenti relazioni. Si ottiene il sistema

$$(a_{11}-\lambda)b_{11}+c_3b_{12}+c_2b_{13}=(a_{11}-\lambda)b_{21}+c_3b_{22}+c_2b_{23}=(a_{11}-\lambda)b_{31}+c_3b_{32}+c_2b_{33}=0,$$

il cui determinante $\|b_{rs}\| > 0$; pertanto questo sistema non può essere soddisfatto che per $a_{11} = \lambda, c_3 = c_2 = 0$.

Analogamente si ottiene $a_{22} = a_{33} = \lambda, c_1 = 0$; ma è $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$. per cui $\lambda = 0$. Da ciò l'annullarsi della omografia γ.

(1) *Sul moti rigidi di una massa fluida limitata.*

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1923.

(3) Geometricamente: Sulla C^{m+1} con punto $m^{\text{-plo}}$ O, la serie lineare g^2_{m+1} segata dalle rette del piano e la g^{m-1}_{m+1} definita dagli m gruppi costituiti ciascuno da O e da m