ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

In tale circostanza dalla (4') scende che *il moto della massa liquida è rigido*.

Riferendosi a una Nota già citata [1] risulta poi che tutte le condizioni dinamiche risultano soddisfatte purchè il moto rigido abbia carattere uniforme.

Matematica. — *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale*. Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI [2].

Raccolgo in questo lavoro alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale, che sono forse degni di qualche interesse.

Riassumo anche, per maggior chiarezza, qualche risultato già noto mio e del Čech. Si tratta, essenzialmente, di risultati di vario genere, diretti a illuminare l'uno o l'altro capitolo di questo nuovo campo di ricerche geometriche.

§ 1. — *Retta principale*.

1. Comincio con l'enunciare un lemma che debbo a una comunicazione verbale del prof. Togliatti, che io avevo interpellato sul come si potesse generalizzare la retta dei flessi di una cubica raz. ad una *curva piana* C *di grado* $m+1$, *che abbia un punto* m^{uplo}. Questa generalizzazione ci sarà assai utile più avanti. Se $p_1 = 0, p_2 = 0, \ldots, p_m = 0$ sono le tangenti nel punto m^{uplo} si consideri il sistema lineare di curve piane determinato dalla C e dalle $p_i^{m+1} = 0$, ciascuna delle quali è formata da una delle tangenti p_i contata $m+1$ volte. In esso vi è generalmente una sola curva che si spezza nelle m tangenti $p_i = 0$ citate, e in una $(m+1)^{\text{esima}}$ retta, che diremo la *retta principale* della C [3].

---

ad esempio l'annullarsi dei coefficienti della prima delle precedenti relazioni. Si ottiene il sistema

$$(a_{11}-\lambda)\,b_{11}+c_3 b_{12}+c_2 b_{13}=(a_{11}-\lambda)\,b_{21}+c_3 b_{22}+c_2 b_{23}=(a_{11}-\lambda)\,b_{31}+c_3 b_{32}+c_2 b_{33}=0,$$

il cui determinante $\|b_{rs}\| > 0$; pertanto questo sistema non può essere soddisfatto che per $a_{11}=\lambda, c_3=c_2=0$.

Analogamente si ottiene $a_{22}=a_{33}=\lambda, c_1=0$; ma è $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$. per cui $\lambda=0$. Da ciò l'annullarsi della omografia γ.

(1) *Sul moti rigidi di una massa fluida limitata.*

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1923.

(3) Geometricamente: Sulla C^{m+1} con punto $m^{-\text{plo}}$ O, la serie lineare g^2_{m+1} segata dalle rette del piano e la g^{m-1}_{m+1} definita dagli m gruppi costituiti ciascuno da O e da m

2. La definizione del Togliatti si può estendere nel modo seguente. Se tra le tangenti $p_i = 0$ noi ne scegliamo due, che per qualche loro carattere proiettivo si distinguono dalle altre, e se esse sono p. es. la p_1 e la p_2, tra le curve del sistema lineare determinato dalle C, dalla p_1^{m+1} e dalla p_2^{m+1} ve ne è una spezzata nel prodotto delle tangenti p_1, p_2 e di un'altra curva C′ di grado $m-1$, per cui il punto m^{uplo} della C è multiplo di ordine $m-2$. La retta *principale* della C′ si dirà la *retta che* C *subordina* alle tangenti p_1, p_2.

§ 2. — *Coordinate di punto e piano osculatore per una curva sghemba.*

Le coordinate x, y, z, t di un punto A di una curva sghemba C sono funzioni di un parametro u; al variare di u, il punto A descrive la curva. Con $(x\, dx\, d^2 x\, d^3 x)$ indicheremo il determinante di cui tra ( ) è scritta la prima riga, e le altre se ne deducono sostituendo alla x successivamente le x, z, t. Se w ne è il suo segno ($w = \pm 1$) noi porremo

$$w(x\, dx\, d^2 x\, d^3 x) = a^2\, du^6 \quad , \quad F_3 = a\, du^3 . \tag{1}$$

La a è determinata a meno del segno. La F_3 è nulla nei punti a piano osculatore stazionario, punti che riguarderemo come singolari ed escluderemo senz'altro. Se noi poniamo ξ, η, ζ, τ uguali ai complementi algebrici di x_{uuu} in $(x\, x_u\, x_{uu}\, x_{uuu})$ moltiplicati per $w : a$, o, come scriveremo simbolicamente, se porremo:

$$\xi = \frac{w}{a}\,(x\, x_u\, x_{uu}) \ , \tag{2}$$

il piano ξ sarà il piano osculatore, e le sue coordinate saranno scelte in guisa che

$$(x\, dx\, d^2x\, d^3x) = (\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi) = w\, F_3^2 \tag{3}$$

$$F_3 = S\xi\, d^3x = -\,Sd\xi\, d^2x = Sdx d^2\xi = -\,Sx\, d^3\xi \ . \tag{4}$$

Con la convenzione (2) o (3) la teoria delle curve assume un aspetto assai semplice. E io ricorderò i risultati più importanti per noi.

---

punti ad esso consecutivi sui singoli rami uscenti da O hanno generalmente *un* gruppo comune, perchè contenute entrambe nella g_{m+1}^{m+1} completa. Pensando C^{m+1} come proiezione di un Γ^{m+1} normale di S_{m+1} da un S_{m-2} situato entro un S_{m-1} m-segante di Γ^{m+1}, la retta trovata risulta proiezione della retta omologa di quell' S_{m-1} nella polarità definita dalla curva. (Nota del prof. Togliatti).

La forma $S\xi\, d^4x$ *vale* $2d\,F_3$; *la forma* $S\,d^3x\, d^3\xi$ *dipende dal solo differenziale* PRIMO *du ed è nulla soltanto se la curva appartiene a un complesso lineare. Se* x *è un punto arbitrario* A *della curva ed* x_u, x_{uu}, x_{uuu} *sono le derivate della* x *calcolate in* A, *e se usiamo notazioni analoghe per il corrispondente piano osculatore* ξ, *allora la reciprocità che fa corrispondere al punto di coordinate*

$$\lambda x + \mu\, x_u + \sigma x_{uu} + \varrho\, x_{uuu}$$

il piano di coordinate

$$\lambda \xi + \mu\, x_u + \sigma \xi_{uu} + \varrho\, \xi_{uuu}$$

è il sistema nullo osculatore della curva (cioè determinato dalle cubiche sghembe osculatrici).

§ 3. — *Superficie riferita alle linee asintotiche.*

Se x, y, z, t sono le coordinate di un punto di una superficie S, funzioni di due parametri u, v, e se lo $u =$ cost., $v =$ cost. sono le asintotiche, definiamo una quantità $a = a_{12} = e^\theta$ in guisa che

$$\frac{1}{|a|}(x\, x_u\, x_v\, d^2x) = 2a_{12}\, du\, dv = 2a\, du\, dv = 2e^\theta\, du\, dv\,. \tag{5}$$

Posto, in modo analogo alla (2) della teoria delle curve:

$$\xi = \frac{1}{|a|}(x\, x_u\, x_v) \text{ e quindi : } x = \frac{\varepsilon}{|a|}(\xi\, \xi_u\, \xi_v)$$

con $\varepsilon = \pm 1$, *le* ξ *saranno le coordinate del piano tangente, e varranno le*:

$$F_2 = S\xi\, d^2x = -\,Sd\xi\, dx = Sx\, d^2\xi \tag{6}$$

$$(x\, x_u\, x_v\, d^2x) = \varepsilon\,(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, d^2\xi) \tag{7}$$

affatto analoghe alle (3) e (4). Moltiplicando le x per un fattore ϱ, anche le ξ restano moltiplicate per ϱ, mentre a resta moltiplicata per ϱ^2. Posto

$$F_3 = \frac{1}{2}\,S(dx\, d^2\xi - d\xi\, d^2x) \tag{8}$$

vale una formola del tipo:

$$F_3 = a\,(\beta\, du^3 + \gamma dv^3)\,. \tag{9}$$

La $F_3 = 0$ definisce le linee di Darboux; la $\overline{F}_3 = a\,(\beta\, du^3 - \gamma\, dv^3) = 0$ le linee di Segre. Le β e γ non sono che i simboli $\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}$ per l' elemento lineare di Gauss. Se $\beta\gamma = 0$, *la superficie è rigata; se $\beta = \gamma = 0$ la superficie è quadrica.*

Valgono le equazioni

$$(10)\quad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x \\ \xi_{uu} = \theta_u x_u - \beta x_v + \pi_{11} x \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_{vv} &= \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x \\ \xi_{vv} &= -\gamma x_u + \theta_v x_v + \pi_{22} x \end{aligned}$$

$$(11)\qquad \pi_{11} - p_{11} = \beta_v + \beta\theta_v \qquad \pi_{22} - p_{22} = \gamma_u + \gamma\theta_u .$$

La $\sum (p_{ii} + \pi_{ii})\, du_i^2$, ove $u = u_1$, $v = u_2$, si può riguardare come la terza forma fondamentale della superficie. Moltiplicando le x, ξ per uno (*stesso*) fattore ϱ, la a resta moltiplicata per ϱ^2, le β, γ non mutano, le p_{ii} variano in modo complicato.

Se $t = 1$, cioè se le x, y, z sono coordinate non omogenee, allora $p_{11} = p_{22} = 0$; le prime tre coordinate di piano tangente ξ, η, ζ sono le *coordinate di Lelieuvre*, che qui appaiono come le *coordinate che, secondo le nostre convenzioni, corrispondono alle coordinate non omogenee*. Ed è $a\, Sx_{uv}\xi_{uv} = \theta_{uv} + \beta\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{\varrho}} \dfrac{\partial^2 \log \sqrt{\varrho}}{\partial u\, \partial v} - f$, ove $-1 : \varrho^2$ è la curvatura di Gauss. Il caso $a = \beta\gamma$ corrisponde alle coordinate *normali*; in tal caso la retta unente i punti x, x_{uv} è la *normale proiettiva*. Valgono i teoremi:

Due superficie con uguali valori di β, γ sono proiettivamente applicabili e viceversa.

La più semplice congruenza di rette uscenti una da ciascun punto x della superficie S, *le cui sviluppabili corrispondano a un sistema coniugato di questa, è la congruenza delle normali proiettive. Dico più semplice quella congruenza, la cui determinazione richiede derivate di ordine minimo delle coordinate omogenee* (prefissate ad arbitrio) *dei punti della nostra superficie.*

§ 4. — *Flecnodi.*

Una tangente p. es. all'asintotica $u =$ cost. ha un contatto tripunto con la superficie; essa ha un contatto quadripunto soltanto nei punti ove $\gamma = 0$, che sono i punti ove l'asintotica $u =$ cost. ha un flesso. Tali punti si dicono flecnodi, e il loro luogo *linea flecnodale*. Analoghi teoremi e definizioni per i punti in cui $\beta = 0$.

Se la superficie è una rigata e p. es. β è identicamente nullo (le $v =$ cost. sono rette) diconsi *flecnodi* i soli punti ove $\gamma = 0$.

La tangente all'asintotica $u =$ cost. *ha un contatto pentapunto con la superficie soltanto nei flecnodi ove la linea flecnodale $\gamma = 0$ ha un punto doppio od è tangente a un'asintotica $u =$* cost., *cioè nei punti ove $\gamma = \gamma_v = 0$.*

§ 5. — *Invarianti di un sistema coniugato.*

Sia $du - \varrho d\,v = 0$ l'equazione di un sistema di linee $\overline{u} =$ cost., sia $du + \varrho\, dv = 0$ l'equazione del sistema coniugato $\overline{v} =$ cost. Varrà una equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \overline{u}\, \partial \overline{v}} = A \frac{\partial x}{\partial \overline{u}} + B \frac{\partial x}{\partial \overline{v}} + C x$$

per le coordinate di punto, ed una equazione analoga per le coordinate di piano tangente. La prima ha due invarianti

$$I_1 = AB + C - A_u \qquad I_2 = AB + C - B_v$$

la seconda due invarianti analoghi I'_1, I'_2. Essi mutano al variare dei parametri $\overline{u}, \overline{v}$ (cioè mutando $\overline{u}$ in una sua funzione, e $\overline{v}$ in una sua funzione). Però *le forme* $I_i\, d\overline{u}\, d\overline{v}$, $I'_i\, d\overline{u}\, d\overline{v}$ *non mutano, e sono quindi determinate appena sono date le linee* $\overline{u}, \overline{v}$, *cioè la funzione* ϱ. *Esse si calcolano,* data ϱ, *con sole derivazioni*

Si trova: *Il sistema* $C du^2 + D dv^2 = 0$ *di linee coniugate è ad invarianti di punto uguali se*

$$\frac{\partial^2 \log \dfrac{C}{D}}{\partial u\, \partial v} - \left(\gamma \frac{C}{D}\right)_v + \left(\beta \frac{D}{C}\right)_u = 0\,. \tag{12}$$

E' ad invarianti tangenziali uguali, se vale la stessa equazione in cui si scambino β, γ *con* $-\beta, -\gamma$, *cioè se il sistema coniugato ad esso armonico* $C du^2 - D dv^2 = 0$ *è ad invarianti di punto uguali. Se il sistema coniugato ha uguali sia gli invarianti di punto che quelli tangenziali, allora esso è isotermo-coniugato, si può supporre* $C = D$; *e la superficie su cui giace è una superficie di Ionas* (caratterizzata delle $\beta_u = \gamma_v$).

I sistemi ad invarianti uguali si conservano per deformazioni proiettive.

La loro ricerca è ridotta all'integrazione della (12); *ma,* moltiplicando C e D per un fattore opportuno (ciò che non cambia il sistema considerato) *si può alla* (12) *sostituire il sistema lineare semplicissimo*:

$$C_v = -\beta D\ , \quad D_u = -\gamma C\,. \tag{13}$$

Si trova pure: *I sistemi di curve* $\dfrac{du}{A} - \dfrac{dv}{B} = d\overline{u} = 0$ *che insieme alle curve coniugate formano un sistema per cui* $I_1 = I'_2$ *sono quelli per cui*

$$\frac{\partial^2 \log\left(\dfrac{A}{B}\right)}{\partial u\, \partial v} + \left(\frac{B}{A}\gamma\right)_u - \left(\beta \frac{A}{B}\right)_v = 0 \tag{14}$$

equazione la cui integrazione si può ridurre al sistema lineare

$$A_v = -\gamma B \qquad B_u = -\beta A \tag{15}$$

che si deduce da (13), scambiando β con γ.

Queste sono le stesse equazioni che caratterizzano i sistemi di linee $du : A = dv : B$, *le cui tangenti formano una congruenza* W! Ecco così data una proprietà analitica di tali congruenze, che io credo nuova.

Se anche $I_2 = I'_1$, *cioè se anche le tangenti coniugate descrivono una congruenza* W, *si trova che il sistema coniugato è isotermo-coniugato, che si può supporre* $A = B$, *che la superficie su cui giace è una superficie* R *di Desmoulin-Tzitzeica, caratterizzata dalla* $\beta_v = \gamma_u$ (mentre per le superficie di Ionas $\beta_u = \gamma_v$) [1].

Trovata una soluzione A, B delle (15), cioè una congruenza W, di cui la superficie data è prima falda focale, *le funzioni*

$$S = \frac{1}{2A} N_u \, , \, T' = -T = \frac{1}{2B} N_v$$

[definite nelle mie Note recenti [2]] *soddisfano alla*

$$S_v = -\beta(-T) \quad -T_u = -\gamma S \text{ cioè } S_v = -\beta T' \, , \, T'_u = -\gamma S$$

e danno quindi una soluzione delle (13). Come è noto dalle teorie classiche, ciò si spiega osservando che una congruenza W determina su una falda focale un sistema coniugato a invarianti uguali. *Viceversa da ogni soluzione delle* (13) *con sole quadrature si determina una soluzione di* (14). Rinvio ad altra occasione l'interessante esame delle superficie isotermo-asintotiche ($\beta = \gamma$), per le quali le equazioni (13) e (15) coincidono.

§ 6. — *Deformazione dei complessi e delle congruenze di rette.*

Ho già definito altrove quando due complessi di rette sono *proiettivamente applicabili del 2° ordine* [3]. Con metodi ancora più semplici di quelli da me usati per le ipersuperficie si dimostra che i complessi di rette sono *proiettivamente indeformabili* (del secondo ordine). Il Cartan nei *Comptes Rendus* del Congresso di Strasburgo ha generalizzato tali definizioni

(1) Se una congruenza W ha per falde focali due superficie R, noi possiamo deformare una falda in guisa che, se ogni suo elemento trascina con sè il raggio corrispondente della congruenza, la nuova congruenza, a cui si giunge dopo la deformazione, abbia i secondi fuochi in linea retta. È questo un nuovo modo di stabilire per le superficie R una teoria della trasformazione per congruenze W.

(2) *La teoria proiettiva delle congruenze* W e *Relazioni tra le due falde focali di una congruenza* W; questi Rendiconti, sedute del 4 marzo e 15 aprile 1923.

(3) *Fondamenti della geom. proiett. differ. dei complessi e delle congruenze di rette,* (ibidem, tomi 27_2 e 28_1).

non solo alla *applicabilità proiettiva dei complessi del primo ordine, ma al caso assai più notevole dell'applicabilità proiettiva del secondo ordine delle congruenze di rette*, enunciando senza dimostrazione che le congruenze di rette deformabili dipendono da una funzione di due variabili, eccetto un caso singolare, che ricorderemo qui sotto.

Applicando i nostri metodi si giunge al seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè, date due superficie $S, \bar{S}$ *in corrispondenza biunivoca, esistano su di esse due sistemi di linee omologhe* Δ, *le cui tangenti formino due congruenze applicabili, è che le asintotiche si corrispondano sulle due superficie e che quelle linee* Δ *e le coniugate abbiano su* S *due invarianti* I_1, I'_2 *uguali agli invarianti* $\bar{I}_1, \bar{I}'_2$ *del sistema omologo su* $\bar{S}$. Noi possiamo cioè rappresentare la corrispondenza tra i punti delle due superficie in guisa che punti omologhi di $S, \bar{S}$ abbiano uguali coordinate asintotiche u, v. Se in tal caso $du - \varrho dv = 0$ è l'equazione delle linee Δ, le espressioni

$$\frac{\partial}{\partial v}(\beta\varrho) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right) \tag{16}$$

e

$$\varrho^2\left(L - \varrho\beta_u - 2\beta\varrho_u + \frac{1}{2}\beta^2\varrho^2\right) - \left(M + 2\gamma\frac{\varrho_v}{\varrho} + \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\varrho^2} - \frac{\gamma_v}{\varrho}\right) \tag{17}$$

debbono aver valori uguali sulle due superficie. Ho posto qui, come già in altri miei lavori su argomenti analoghi

$$L = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - (p_{11} + \pi_{11})$$

$$M = \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - (p_{22} + \pi_{22}).$$

La forma $L\,du^2 + M\,dv^2$ non varia per collineazioni, nè per reciprocità. Il caso singolare del Cartan è quello in cui le $S, \bar{S}$ sono proiettivamente applicabili, cioè hanno uguali valori delle β, γ [1]; caso nel quale la prima delle condizioni relativa a p è identicamente soddisfatta.

Chimica. — *Ricerche sulla guanidina.* Memoria del Corrisp. G. Pellizzari.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

[1] Esaminando le condizioni d'integrabilità si trova che, cambiando i parametri delle u, v, se una superficie è proiettivamente deformabile, allora (escluso il caso assai più elementare delle rigate), cambiando i parametri delle u, v, si può rendere $\beta = 1$, oppure $\beta_v = \gamma_u$. Il secondo caso è quello delle superficie R di Tzitzeica-Desmouslins.