ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Sulla massa mutua di due elettroni.* Nota di E. Persico, presentata dal Socio O. M. Corbino [1].

E' noto che la massa elettromagnetica non è additiva, vale a dire la massa di un sistema non è uguale alla somma delle masse delle singole parti, ma a questa somma più un termine (positivo o negativo) dipendente dalla posizione reciproca delle parti (massa mutua). Il Silberstein [2] ha calcolato questo termine per il sistema formato da due elettroni, cioè da due sfere ripiene omogeneamente di elettricità, ed ha trovato che, se si indicano con e_1 ed e_2 le cariche elettriche (in unità Heaviside), con R_1 e R_2 i raggi e con a la distanza dei centri, la massa mutua per velocità nulla è data da

$$[1] \qquad m_{12} = \frac{e_1 e_2}{2\pi a c^2} \left\{ 1 - \frac{1}{5} \frac{R_1^2 + R_2^2}{a^2} \right\}$$

se le due sfere sono completamente esterne l'una all'altra, e da:

$$[1'] \qquad m_{12} = \frac{e_1 e_2}{2\pi R_2 c^2} \left\{ 1 - \frac{1}{5} \frac{a^2 + R_1^2}{R_2^2} \right\}$$

se la sfera (1) è tutta contenuta nella (2). Questi risultati sono ottenuti calcolando il momento elettromagnetico totale dovuto alle due cariche in moto uniforme con velocità v lungo la retta dei centri, derivando questo momento rispetto a v, e ponendo poi $v = 0$.

Ma la massa elettromagnetica si può calcolare anche sfruttando il noto risultato relativistico che, se l'energia di un sistema è U, la sua massa è $\frac{U}{c^2}$. Nel caso nostro un facile calcolo mostra che, detta U_{12} l'energia elettrostatica mutua delle due cariche, si ha:

$$[2] \qquad \frac{U_{12}}{c^2} = \frac{e_1 e_2}{4\pi a c^2}$$

nel primo caso, e:

$$[2'] \qquad \frac{U_{12}}{c^2} = \frac{e_1 e_2}{8\pi R_2 c^2} \left\{ 3 - \frac{3}{5} \frac{R_1^2}{R_2^2} - \frac{a^2}{R_2^2} \right\}$$

nel secondo, valori che *non* coincidono con quelli dati precedentemente per m_{12}.

(1) Pervenuta all'Accademia il giorno 8 agosto 1923.

(2) Gegenseitige Masse von Elektronen. Phys. Zeit. XII, (1911), p. 87.

La contraddizione ha origine nel fatto che il calcolo della massa come derivata del momento elettromagnetico riposa — come ha dimostrato il Fermi [1] — su un principio errato, cioè che la forza esterna F debba, per un sistema privo di massa materiale, equilibrare sempre esattamente il sistema delle forze elettromagnetiche $d\varphi$ con cui l'autocampo delle cariche in moto reagisce sulle cariche stesse; che si abbia cioè l'uguaglianza (vettoriale)

$$\mathrm{F} = -\int d\varphi$$

(dove l'integrale va esteso a tutto lo spazio occupato da cariche). Invece una più corretta nozione di corpo rigido ha condotto l'A. citato alla formula

$$\mathrm{F} = -\int d\varphi - \int d\varphi_1 \frac{\Gamma \times (\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2} \tag{3}$$

dove Γ è l'accelerazione, P il punto generico cui è applicata la forza $d\varphi_1$, O è un punto fisso arbitrario, $d\varphi_1$ la forza $d\varphi$ calcolata per lo stato di quiete. Il secondo integrale, che designeranno con F′, rappresenta la correzione trovata dal Fermi, ed è in generale dello stesso ordine di grandezza dell'altro. Lo calcoleremo ora per il sistema dei due elettroni, e mostreremo come, applicando la (3), si trovi che alle espressioni date dal S. per m_{12} va aggiunta una correzione m'_{12}, che porta il valore della massa mutua $(m_{12} + m'_{12})$ ad essere esattamente uguale a quello dato da (2) e (2′).

Assumiamo come asse z la retta dei centri, come origine un suo punto qualunque che assumeremo anche come punto O, talchè il vettore P — O avrà per componenti le coordinate di P, x, y, z. L'accelerazione Γ si deve supporre parallela all'asse z (poichè le formule del S. si riferiscono a questo caso [2]) e quindi avremo $\Gamma \times (\mathrm{P}-\mathrm{O}) = \Gamma_z z$, da cui:

$$\mathrm{F}' = -\frac{\Gamma_z}{c^2}\int z\, d\varphi_1 .$$

(1) Rend. Lincei, 5, XXXI, (1922), p. 184 e p. 306. Vedi anche: Fermi e Pontremoli, Rend. Lincei, 5, XXXII, (1923), p. 162.

(2) Si dice ordinariamente che, se G(v) è il momento elettromagnetico totale per un moto rettilineo di velocità v lungo l'asse z, la massa longitudinale è $\frac{d\mathrm{G}_z}{dv}$ e quella trasversale è $\frac{\mathrm{G}_z}{v}$. Va notato però che quest'ultima, così calcolata, è quella che interviene quando, il moto essendo lungo l'asse z, una forza deviatrice tende a incurvare la traiettoria, ed è diversa in generale da quella che interviene in un moto rettilineo lungo una direzione normale a z, p. es. lungo x, e che sarebbe $\frac{d\mathrm{G}_x}{dv}$. Nel primo caso il moto trasversale è accompagnato da una rotazione, nel secondo è puramente traslatorio.

Poichè per ragione di simmetria F′ è diretta secondo z, e inoltre, detta m' la massa dovuta alla forza F′, si ha $F'_z = m' \Gamma_z$ così avremo:

$$m' = -\frac{1}{c^2}\int z\, d\varphi_{1z}\,.$$

Il nostro sistema si compone di due parti: due sfere di raggi R_1, R_2, di cui designeremo con τ_1, τ_2 i rispettivi volumi e con ϱ_1, ϱ_2 le densità; indicheremo poi con E_1 il campo elettrostatico dovuto alla sfera (1) (in quiete) e con E_2 quello dovuto a (2) (pure in quiete). Avremo allora, indicando con $d\tau$ l'elemento di volume:

[4]
$$m' = -\frac{1}{c^2}\int_{\tau_1+\tau_2} z\varrho\,(E_{1z} + E_{2z})\, d\tau =$$
$$= -\frac{\varrho_1}{c^2}\int_{\tau_1} z\, E_{1z}\, d\tau - \frac{\varrho_1}{c^2}\int_{\tau_1} z\, E_{2z}\, d\tau - \frac{\varrho_2}{c^2}\int_{\tau_2} z\, E_{1z}\, d\tau - \frac{\varrho_2}{c^2}\int_{\tau_2} z\, E_{2z}\, d\tau\,.$$

Denotando con m'_1 ed m'_2 rispettivamente il primo e l'ultimo termine, e con m'_{12} la somma dei due di mezzo, talchè $m' = m'_1 + m'_2 + m'_{12}$, mostreremo che m'_1 ed m'_2 non sono altro che le correzioni relative alle masse m_1 ed m_2 dei due elettroni, ed m'_{12} è la correzione relativa alla massa mutua.

Per prepararci al calcolo di questi integrali conviene scrivere intanto l'espressione di E_{iz} $(i = 1, 2)$. Detta $e_i \left(= \frac{4}{3}\pi R_i^3 \varrho_i\right)$ la carica totale della sfera τ_i, r_i la distanza dal centro, e adottate le unità Heaviside, si ha, come è noto,

$$E_i = \frac{e_i}{4\pi}\frac{r_i}{R_i^3} \text{ all'interno di } \tau_i\ ;\quad E_i = \frac{e_i}{4\pi}\frac{1}{r_i^2} \text{ all'esterno di } \tau_i\,.$$

Se poi si indicano con z_i le coordinate z dei centri, e si pone $\zeta_i = z - z_i$, si ha evidentemente

[5]
$$E_{iz} = \frac{e_i}{4\pi}\frac{\zeta_i}{R_i^3} \text{ all'interno di } \tau_i\ ;\quad E_{iz} = \frac{e_i}{4\pi}\frac{\zeta_i}{r_i^3} \text{ all'esterno di } \tau_i\,.$$

Calcolo di m'_1 ed m'_2. — Calcoliamo, p. es., m'_1. Abbiamo, ricordando che $z = z_1 + \zeta_1$,

$$m'_1 = -\frac{\varrho_1}{c^2}\int z\, E_{1z}\, d\tau = -\frac{\varrho_1}{c^2}\int_{\tau_1} \zeta_1\, E_{1z}\, d\tau - \frac{\varrho_1}{c^2} z_1 \int_{\tau_1} E_{1z}\, d\tau\,.$$

L'ultimo integrale è nullo (risultante delle forze esercitate dall'elettrone su sè stesso, in quiete); nel primo, che chiameremo I, si può introdurre la (5) e si ha:

$$I = \int_{\tau_1} \zeta_1\, E_{1z}\, d\tau = \frac{e_1}{4\pi R_1^3}\int \zeta_1^2\, d\tau\,.$$

Introdotto per un momento un sistema di assi ξ_1, η_1, ζ_1, aventi l'origine nel centro di τ_1, si vede subito che, per ragione di simmetria:

$$\int_{\tau_1} \xi_1^2 \, d\tau = \int_{\tau_1} \eta_1^2 \, d\tau = \int_{\tau_1} \zeta_1^2 \, d\tau = \frac{1}{3} \int_{\tau_1} r_1^2 \, d\tau = \frac{4\pi}{15} \mathrm{R}_1^5 .$$

Si ha dunque:

$$\mathrm{I} = \frac{e_1}{15} \mathrm{R}_1^2 \tag{6}$$

da cui:

$$m_1' = \frac{-e_1^2}{20\pi c^2} \frac{1}{\mathrm{R}_1}$$

e analoga espressione si troverebbe per m_2'. La massa di un elettrone sferico, pieno, dedotta dal momento elettromagnetico, è $m_1 = \dfrac{e_1^2}{5\pi c^2} \dfrac{1}{\mathrm{R}_1}$ mentre l'energia elettrostatica è $\mathrm{U}_1 = \dfrac{3e_1^2}{20\pi} \dfrac{1}{\mathrm{R}_1}$. Si vede così che m_1' ha esattamente il valore che occorre perchè sia verificata la relazione $m_1 + m_1' = \dfrac{\mathrm{U}_1}{c^2}$. È questo un risultato già trovato dal Fermi applicando la sua formula al caso della simmetria sferica.

Calcolo di m_{12}'. — Sostituendo, nei due termini centrali della (4), in luogo di z le espressioni $z_1 + \zeta_1$ o $z_2 + \zeta_2$, si ha;

$$m_{12}' = -\frac{\varrho_1 z_2}{c^2} \int_{\tau_1} \mathrm{E}_{2z} \, d\tau - \frac{\varrho_2 z_1}{c^2} \int_{\tau_2} \mathrm{E}_{1z} \, d\tau - \frac{\varrho_1}{c^2} \int_{\tau_1} \zeta_2 \mathrm{E}_{2z} \, d\tau - \frac{\varrho_2}{c^2} \int_{\tau_2} \zeta_1 \mathrm{E}_{1z} \, d\tau .$$

I primi due termini hanno un significato semplice: detta T la proiezione su z della forza che esercita la sfera (2) sulla (1), e quindi $-$T la proiezione su z della forza esercitata da (1) su (2), si ha evidentemente:

$$\varrho_1 \int_{\tau_1} \mathrm{E}_{2z} \, d\tau = \mathrm{T} \quad , \quad \varrho_2 \int_{\tau_2} \mathrm{E}_{1z} \, d\tau = -\mathrm{T} .$$

Sostituendo nell' espressione di m_{12}', e rammentando che $z_2 - z_1 = a$, si ottiene:

$$m_{12}' = -\frac{\mathrm{T}a}{c^2} - \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \tag{7}$$

dove con L_1 ed L_2 si sono designati, per brevità, gli ultimi due termini. Vedremo ora che il calcolo di T, L_1 ed L_2 si può fare agevolmente sfruttando gli sviluppi formali già adoperati dal S. nella citata Memoria, il che permetterà di evitare il calcolo diretto, alquanto laborioso, di taluni integrali. Conviene trattare separatamente i due casi in cui le sfere sono esterne l'una all'altra, o l'una interna all'altra (il caso intermedio non è considerato dal S.).

1° *caso*. — Se le due sfere sono esterne ($a > R_1 + R_2$) la loro attrazione mutua si calcola come se fossero cariche puntiformi ed è quindi $T = -\frac{e_1 e_2}{4\pi}\frac{1}{a^2}$; del pari l'energia mutua è data da $U_{12} = \frac{e_1 e_2}{4\pi}\frac{1}{a} = -Ta$.

Calcoliamo ora L_1 servendoci della (5)

$$L_1 = \frac{\varrho_1}{c^2}\int_{\tau_1} \zeta_2 E_{2z}\, d\tau = \frac{\varrho_1}{c^2}\frac{e_2}{4\pi}\int_{\tau_1} \frac{\zeta_2^2}{r_2^3}\, d\tau .$$

Per calcolare questo integrale si osservi che, detta s la distanza di un punto dall'asse z, ($s^2 = x^2 + y^2$), si ha evidentemente $\zeta_2^2 = r_2^2 - s^2$, quindi:

$$L_1 = \frac{e_2}{4\pi c^2}\int_{\tau_1} \frac{\varrho_1\, d\tau}{r_2} - \frac{\varrho_1 e_2}{4\pi c^2}\int_{\tau_1} \frac{s^2}{r_2^3}\, d\tau .$$

Il primo di questi termini, a meno del fattore c^2, rappresenta l'energia potenziale della carica e_2 nel campo prodotto dalla sfera (1) cioè U_{12} di cui abbiamo già dato l'espressione: quanto al secondo termine, l'integrale che vi figura è già stato calcolato dal S. che lo denota con I_1 e trova: $I_1 = \frac{8\pi R_1^5}{15\, a^3}$. Si ha dunque:

$$L_1 = -\frac{Ta}{c^2} - \frac{e_1 e_2}{10\pi c^2}\frac{R_1^2}{a^3} .$$

Analogamente si troverebbe $L_2 = -\frac{Ta}{c^2} - \frac{e_1 e_2}{10\pi c^2}\frac{R_2^2}{a^3}$.

Sostituendo nella (7) si trova:

$$m'_{12} = \frac{e_1 e_2}{2\pi a c^2}\left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\frac{R_1^2 + R_2^2}{a^3}\right\}$$

e sommando con la (1) si ha proprio l'espressione (2).

2° *caso*. — Se la sfera (1) è tutta interna alla sfera (2), l'energia mutua è:

$$U_{12} = \frac{e_1 e_2}{\pi}\left\{\frac{3}{8}\frac{1}{R_2} - \frac{3}{40}\frac{R_1^2}{R_2^3} - \frac{1}{8}\frac{a^2}{R_2^3}\right\}$$

e di qui, derivando rispetto ad a, si ottiene:

$$T = -\frac{e_1 e_2}{4\pi}\frac{a}{R_2^3} .$$

Calcoliamo L_1 servendoci della (5),

$$L_1 = \varrho_1 \frac{e_2}{4\pi c^2} \frac{1}{R_2^3} \int_{\tau_1} \zeta_2^2 \, d\tau .$$

Rammentando che $\zeta_2 = \zeta_1 - a$ si vede che

$$\int_{\tau_1} \zeta_2^2 \, d\tau = \int_{\tau_1} \zeta_1^2 \, d\tau + a^2 \int_{\tau_1} d\tau - 2a \int_{\tau_1} \zeta_1 \, d\tau .$$

Il primo di questi integrali l'abbiamo già calcolato (v. 6), il secondo è immediato, il terzo è nullo per ragione di simmetria. Si ha in definitiva $\int_{\tau_1} \xi_2^2 d\tau = \left(\frac{R_1^2}{5} + a^2\right) \tau_1$ e quindi, poichè $\varrho_1 \tau_1 = e_1$,

$$L_1 = \frac{e_1 e_2}{4\pi c^2} \left(\frac{1}{5}\frac{R_1^2}{R_2^3} + \frac{a^2}{R_2^3}\right) .$$

Passiamo al calcolo di L_2; converrà a tal uopo dividere il volume τ_2 in due parti: l'una (quella interna alla sfera τ_1) coincidente con τ_1, e l'altra (compresa fra le due sfere) che chiameremo τ_2'. Avremo allora:

$$L_2 = \frac{\varrho_2}{c^2} \int_{\tau_1 + \tau_2'} \zeta_1 E_{1z} d\tau = \frac{\varrho_2}{c^2} \int_{\tau_1} \zeta_1 E_{1z} \, d\tau + \frac{\varrho_2 e_1}{4\pi c^2} \int_{\tau_2'} \frac{\zeta_1^2}{r_1^3} d\tau$$

e rammentando che $\zeta_1^2 = r_1^2 - s^2$, e osservando che il primo di questi integrali è quello che abbiamo già calcolato e chiamato I, avremo:

$$L_2 = \frac{\varrho_2}{c^2} \, I + \frac{\varrho_2 e_1}{4\pi c^2} \int_{\tau_2'} \frac{d\tau}{r_1} - \frac{\varrho_2 e_1}{4\pi c^2} \int_{\tau_2'} \frac{\zeta_1^2}{r_1^3} d\tau .$$

Il primo di questi due termini si calcola facilmente per mezzo del suo significato meccanico. Infatti, prescindendo dal fattore c^2, esso rappresenta l'energia potenziale della carica e_1 supposta concentrata nel centro di τ_1 e soggetta all'azione di una carica di densità ϱ_2, distribuita in τ_2'. Questa carica si può evidentemente sostituire con una carica di densità ϱ_2, distribuita in τ_2, e una di densità $-\varrho_2$ distribuita in τ_1: così, ricordando che il potenziale di una sfera omogenea è nel suo interno, a distanza r dal centro, $\varphi = \varrho\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}r^2\right)$ si trova

$$[10] \qquad \frac{\varrho_2 e_1}{4\pi c^2} \int_{\tau_2'} \frac{d\tau}{r_1} = \frac{\varrho_2 e_1}{c^2} \left\{\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) - \frac{1}{6} a^2\right\} .$$

Quanto all'ultimo termine della (9), l'integrale che vi figura è stato già calcolato dal S., che lo indica con $2\pi I'_2$ e trova $I'_2 = \frac{2}{3}(R_2^2 - R_1^2) - \frac{2}{5}a^2$. Quindi l'ultimo termine della (9) è:

$$\frac{\varrho_2\, e_1}{4\pi c^2}\int_{\tau'_2}\frac{\zeta_1^2}{r_2^3}\,d\tau = \frac{\varrho_2\, e_1}{c^2}\left\{\frac{1}{3}(R_2^2 - R_1^2) - \frac{1}{5}a^2\right\}.$$

Ricostruendo dunque l'espressione (9) si ha:

$$L_2 = \frac{e_1\, e_2}{4\pi c^2}\left\{\frac{1}{2R_2} - \frac{3}{10}\frac{R_1^2}{R_2^3} + \frac{1}{10}\frac{a^2}{R_2^3}\right\}.$$

Abbiamo così trovato T, L_1, L_2: sostituendoli nella (7) abbiamo:

$$m'_{12} = \frac{e_1\, e_2}{8\pi c^2}\left\{-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{5}\frac{R_1^2 - a^2}{R_2^3}\right\}.$$

Sommando questa espressione alla (1') si ottiene la (2').

Dunque in ogni caso la massa mutua è $\frac{U_{12}}{c^2}$, conformemente al principio di relatività.

Fisica. — *Reticoli del Michelson incrociati* (1). Nota di RITA BRUNETTI, presentata dal Socio A. GARBASSO (2).

1. Per quanto sia già nell'uso l'incrocio di un reticolo a gradinata del Michelson con altro apparecchio ad alto potere risolutivo, dell'incrocio di di due reticoli non ho trovato che un rapido cenno in due lavori (3) dai quali non appare che gli autori abbiano dedicato uno studio particolare a questa disposizione, nè che l'abbiano veramente adoperata per l'analisi della struttura fina di qualche radiazione.

Poichè essa mi ha largamente servito allo scopo stesso a cui sono state dirette le altre combinazioni di strumenti ad alto potere risolutivo, cioè a decidere a quale di due spettri successivi appartenga un satellite che si presenta nello spazio interposto, ritengo opportuno parlare qui in particolare di tale proprietà caratteristica.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica del R. Istituto di Studî Superiori di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1923.

(3) E. Gehrke, Verhand. d. D. Phys. Gesell., 7, pag. 236, 1905; Nagaoka e Takamine, Phil. Mag., 27, pag. 126, 1914.