ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Purtroppo in questa stagione i *superpictus* non maturano più le uova e perciò non posso descriverle, nè dimostrare se le larve possano vivere o meno nell'acqua salata.

Già da queste ricerche preliminari risulta che non siamo affatto sicuri che non esistano nell'Italia media e meridionale anofeli malariferi capaci di vivere nell'acqua salata. Sarebbe perciò poco prudente ricorrere senz'altro alla salificazione delle acque come mezzo di lotta antimalarica.

Matematica. — *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI (1).

§ 7. — *Superficie con asintotiche di un complesso lineare.*

Le ξ, oltre che come coordinate del piano tangente alla superficie, si possono anche considerare come coordinate del piano osculatore ad una asintotica. Čech ha osservato che, per le asintotiche, esse seguono la legge di corrispondenza fissata al § 2 tra le coordinate di punto e di piano osculatore. Perciò la $Sx_{uuu}\,\xi_{uuu}=0$ è la condizione perchè le $v=\text{cost.}$ appartengano a un complesso lineare: per le equazioni (10) essa vale:

$$\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v}=\beta\gamma\,. \tag{18}$$

Senza più oltre studiare qui questa equazione, notiamo che anche le $v=\text{cost.}$ sono di un complesso lineare, se è anche

$$\frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v}=\beta\gamma \tag{18bis}$$

cioè se $\dfrac{\partial^2 \log\beta:\gamma}{\partial u\,\partial v}=0$, cioè se, cambiando i parametri delle u, v si può rendere $\beta=\gamma$. *Tali superficie sono dunque isotermo asintotiche, il valore $\beta=\gamma$ soddisfa all'equazione di Liouville $\dfrac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v}=\beta^2$, la cui soluzione è ben nota. E perciò*, come è del resto ben noto, *esse si determinano nel modo più semplice.* Il prof. Segre ha provato *che una congruenza* W, *avente una falda focale rigata, ha per seconda falda una superficie di cui un sistema di asintotiche appartiene a un complesso lineare.* Dai risultati precedenti si deduce *che vale anche il teorema reciproco.* Le superficie per cui tutte le asintotiche appartengono a complessi lineari sono

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1923. Vedi Rendiconti, fascicolo precedente, pp. 273-279.

falde focali di 2 congruenze W, di cui la seconda falda è generalmente una (medesima) quadrica; quadrica che, in casi particolari, può essere degenere. Nel caso generale tali superficie coincidono con le superficie a curvatura nulla in geometria ellittica, studiate dal prof. Bianchi.

§ 8. — *La polarità di Lie, e la corrispondenza di Segre.*

Si deve a Čech l'osservazione che la reciprocità, che, per un dato punto x della superficie, al punto $lx + m x_u + n x_v + p x_{uv}$ fa corrispondere il piano $l\xi + m\xi_u + n\xi_v + p\xi_{uv}$ è *la polarità rispetto alla quadrica* di Lie, purchè le x, ξ seguano la legge di corrispondeza da noi imposta con la (7) del § 3. Ciò che dimostra essere tale polarità l'analoga di quella definita dal sistema nullo osculatore per una curva sghemba. La quadrica di Lie e il piano tangente contato due volte determinano quel *fascio di quadriche* che incontra la superficie in una curva che ha in x un punto triplo, le cui tangenti sono le direzioni delle curve di Darboux.

Accanto alla polarità di Lie è notevole la *corrispondenza di Segre* così definita: Ad un piano π uscente da x si fa corrispondere il punto P del piano tangente (punto cuspidale) intersezione dei tre piani tangenti alla superficie nel punto x e nei due punti ad esso infinitamente vicini posti sulla intersezione della superficie e di S. *La corrispondenza di Segre è cubica; ad una retta r uscente da x fa corrispondere una cubica razionale sul piano tangente ξ, avente il punto x, ove tocca le asintotiche, come punto doppio e la retta r', polare di r rispetto alla quadrica di Lie come retta dei flessi. Dualmente la retta r è la retta cuspidale (intersezione dei 3 piani cuspidali) del cono cubico inviluppato dai piani π corrispondente ai punti p della retta r'. Come si vede la corrispondenza di Segre potrebbe da sola condurre a definire la polarità di Lie, come la polarità tra le rette cuspidali r' e le rette dei flessi r. Le direzioni di Segre $\beta\, du^3 - \gamma\, dv^3 = 0$ si possono definire come quelle inviluppate dai piani a cui corrisponde uno stesso punto nella polarità di Lie e nella corrispondenza di Segre.*

§ 9. — *Curve soddisfacenti a un'equazione del secondo ordine.*

Un'equazione del secondo ordine

$$v'' = \mathrm{A}\, v'^3 + \mathrm{B}\, v'^2 + \mathrm{C}\, v' + \mathrm{D} \left(v' = \frac{dv}{du}, v'' = \frac{d^2 v}{du^2} \right)$$

si può sempre scrivere nella forma seguente:

$$(19) \quad a_{12}(du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u) = a_{12}\,(B du^3 - C dv^3) + 2\, a_{12}\,(l_1\, du - l_2\, dv)\, du\, dv$$

ove $\delta^2 u = d^2 u + \theta_u\, du^2$, $\delta^2 v = d^2 v + \theta_v\, dv^2$ (*differenziali controvarianti*).

La retta r intersezione dei piani $\xi_u + l_1 \xi, \xi_v + l_2 \xi$ e la retta duale r' congiungente i punti $x_u + l_1 x, x_v + l_2 x$ si diranno *primo asse* (o semplicemente *asse*) *e secondo asse* dell'equazione.

Le linee soddisfacenti a una tale equazione [1] *uscenti da un punto x della superficie hanno i piani osculatori in x inviluppanti un cono cubico, di cui il primo asse è la retta cuspidale, e i punti di regresso posti su una cubica razionale tangente in x alle asintotiche, per cui il secondo asse è la retta dei flessi.* Ciò avviene in particolare per le *geodetiche* della forma F_2; se F_2 è *normale* $(a_{12} = \beta\gamma)$, la retta cuspidale è la *normale proiettiva.*

Soltanto se $B = \beta$, $C = \gamma$ *il precedente cono cubico si riduce a un fascio, avente il primo asse per sostegno.* In particolare se ne deduce che *le 3 geodetiche per ognuna delle forme* F_2 (che ricordiamo essere definita a meno di un fattore) [2] *uscenti da un punto x in una direzione di Segre hanno i 3 piani osculatori che passano per una medesima retta.* (Čech).

Consideriamo tre curve soddisfacenti a (19) uscenti da un punto x di S nelle tre direzioni definite da una equazione $du^3 - \mu\, dv^3 = 0$, cioè in 3 direzioni formanti una terna *apolare* alle direzioni asintotiche (che ha queste come Hessiano). *Il piano tangente ξ ha il primo asse per retta polare rispetto al triedro formato dai piani osculatori di 3 curve uscenti da x in una terna apolare di direzioni, e soddisfacenti a* (19). *E dualmente.*

Un caso particolare di equazioni (19) è quello delle equazioni cui soddisfano le curve di un fascio, cioè le curve definite da una equazione

$$\frac{1}{\lambda(u, v)} \frac{du}{dv} = \text{cost.} \quad , \quad \text{ossia:}\ d\left(\frac{1}{\lambda}\frac{du}{dv}\right) = 0\,.$$

Si trova in più che:

L'unica terna di curve di un fascio uscente da x con direzioni apolari, e i cui piani osculatori passano per una stessa retta r è quella corrispondente alle curve di Segre. Questa retta (*asse* o *primo asse* della superficie) trovato dal *Čech gode dell'altra proprietà che essa è la retta polare del piano tangente ξ rispetto al triedro formato dai piani osculatori in x alle curve di Darboux.* La retta polare r' (secondo asse) gode di proprietà duali.

[1] Queste linee si conservano in una qualsiasi rappresentazione continua di due superficie l'una sull'altra; in un punto 0 di una superficie S le linee, in cui piani osculatori passano per una retta fissa uscente da 0, soddisfano a tale equazione. Altrettanto avverrà delle linee che loro corrispondono su una qualsiasi superficie S′ che sia in corrispondenza biunivoca con S. (Castelnuovo).

[2] Cioè geodetiche nella geometria metrica definita assumendo F_2 ad elemento lineare.

§ 10. — *Le ipergeodetiche.*

Mentre la forma F_2 è determinata a meno di un fattore (che, volendo, si può fissare con la posizione $a_{12} = \beta\gamma$), la frazione $F_3 : F_2$ (*elemento lineare proiettivo*) è completamente determinata dalla superficie. Le linee per cui è nulla la variazione di $\int \frac{F_3}{F_2}$ si diranno *ipergeodetiche*. *Il cono inviluppato dai piani osculatori alle ipergeodetiche uscenti da un punto x è un cono razionale di sesta classe che tocca il piano tangente nelle direzioni asintotiche e nelle direzioni di Darboux. Le direzioni asintotiche subordinano ad esso* (§ 1) *un cono razionale di quarta classe che tocca il piano tangente secondo le direzioni di Darboux.* Entrambi questi coni determinano due rette *principali* uscenti dal punto x.

§ 11. — *Il fascio canonico.*

Supponiamo per semplicità le coordinate normali, cioè $a_{12} = \beta\gamma$. Consideriamo le retti unenti il punto x al punto

$$x_{uv} + \lambda \left(\frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} x_u + \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial v} x_v \right).$$

Per $\lambda = 0$ si ha la *normale proiettiva*;

$\lambda = -\frac{1}{2}$ si ha la prima *direttrice* di Wilczynski:

$\lambda = -\frac{1}{4}$ si ha il primo *spigolo* (edge) del Green;

$\lambda = -\frac{1}{3}$ si ha l'*asse* sopra definito;

$\left.\begin{array}{l}\lambda = -\frac{1}{6}\\ \lambda = -\frac{1}{12}\end{array}\right\}$ si hanno le due rette *principali* testè definite;

$\lambda = \infty$ si ha la *tangente canonica* delle superficie.

Quindi: *Il fascio determinato dalle rette principali corrispondenti alle ipergeodetiche contiene tutte le rette notevoli, finora scoperte, di una superficie; è notevole che tutte queste rette formino a 4 a 4 birapporti puramente numerici* (parecchi anzi *armonici*). P. es. la *normale proiettiva si può definire come quella retta di tale fascio canonico che genera una congruenza armonica alla superficie data, qualunque sia questa superficie.*

Le rette canoniche coincidono, se si possono scegliere i parametri delle u, v in guisa che $\beta = \gamma = 1$, ciò che dà un caso particolare di su-

perficie isotermo-asintotiche. Le corrispondenti superficie sono soluzioni di un sistema di equazioni

$$x_{uu} = x_v + x(cu + h) \qquad x_{vv} = x_u + x(cv + k) \qquad (c\,, h\,, k = \text{cost.}).$$

Per $c = 0$ si hanno (oltre a qualche caso limite) le superficie che in coordinate non omogenee hanno un'equazione $z = x^r y^s$, Esse godono della proprietà di essere falda focale di una congruenza W, la cui seconda falda è ad esse proiettiva.

§ 12. — *Congruenze.*

Se per ogni punto x della superficie esce una retta r, questa genera una congruenza K. La retta r' che le corrisponde nella polarità di Lie relativa al punto x genera una congruenza K$'$, che diremo la *duale* di K.

La conguenza delle *normali* serve a generalizzare al campo proiettivo la nozione di linee di raggi ϱ_i di curvatura, e al teorema che la semicurvatura media $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$ vale la curvatura della forma normale $2\,\beta\gamma\, du\, dv$, diminuita di 1.

Se K *è armonica alla superficie* (cioè ha sviluppabili che corrispondono a un sistema coniugato) *altrettanto avviene per* K$'$. *Tali congruenze* K *sono tutte e sole quelle formate dalle rette congiungenti il punto x ad un punto* $(\varrho\, x)_{uv}$, *qualunque sia la funzione* ϱ *delle* $u\,, v$.

Se le sviluppabili di K, K$'$ *si corrispondono, allora o le rette* $r\,, r'$ *sono le direttrici di Wilczynski, oppure* K, K$'$ *sono armoniche alla superficie* . In quest'ultimo caso la congruenza K è quella generata dalle rette unenti x al punto $\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)_{uv}$, ove sia:

$$\frac{\beta\,\mathrm{R}_v - \frac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v)\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}_{uu} - \theta_u\,\mathrm{R}_u - \frac{1}{2}(p_{11} + \pi_{11})\,\mathrm{R}} = \frac{\gamma\,\mathrm{R}_u - \frac{1}{2}(\gamma_u + \gamma\,\theta_u)\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}_{vv} - \theta_v\,\mathrm{R}_v - \frac{1}{2}(p_{22} + \pi_{22})\,\mathrm{R}}\,,$$

le caratteristiche della quale sono appunto le sviluppabili di K, K$'$. Queste congruenze sono caratterizzate dalla seguente proprietà geometrica scoperta da Čech. *Si può in* ∞^1 *modi scegliere su r un punto* P, *il quale generi una superficie, il cui piano tangente è il piano che da* P *proietta* r'. Invece, *se su* r' *possiamo scegliere un punto* P, *il quale generi una superficie il cui piano tangente in* P *sia quello che da* P *proietta* r, *la superficie è* (Čech) *una superficie, per cui la forma normale* $2\,\beta\gamma\, du\, dv$ *ha una curvatura* -2. *Quelle di queste superficie, che in più sono isotermo-asintotiche sono tutte e solo quelle, di cui le asintotiche appartengono a complessi lineari.*

Se le due congruenze duali K , K' *hanno le sviluppabili indeterminate, esse sono le congruenze descritte dalle direttrici*; le prime direttrici passano tutte per un punto P, le seconde giacciono in un piano π. Queste superficie, studiate da Wilczynski, sono nel caso che P e π non si appartengono quelle stesse che Tzitzeica aveva definite per via metrica come le superficie per cui la distanza da un punto fisso al piano tangente è proporzionale alla radice quarta della curvatura di Gauss. Nel caso limite che il punto P e il piano π si appartengono, tali superficie hanno le asintotiche appartenenti a complessi lineari; e *tutte le superficie, le cui asintotiche appartengono ad un complesso lineare, o sono del tipo precedente, o sono proiettivamente applicabili su una di tali superficie.*

Risultati interessanti si ottengono anche esaminando quando un' altra retta canonica (p. es. la normale o l'asse) descrive una congruenza a sviluppabili indeterminate, cioè passa per un punto fisso. Se p. es. l'*asse* passa per un punto fisso, si trovano le superficie di Čech, per cui le linee di Segre sono piane.

Storia della matematica. — *Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange.* Memoria del Corrispondente GINO LORIA.

Questo lavoro verrà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Chimica. — *Ricerche farmacologiche sul ferro*: I. *Solfuro ferroso colloidale preparato in presenza di gelatina* (1). Nota del Socio L. SABBATANI (2).

I.

SOLUZIONI COLLOIDALI DI SOLFURO FERROSO.

Seguitando le mie ricerche sul ferro, dopo avere studiata l'azione farmacologica del cloruro ferrico (3) e del solfato ferroso (4), ho studiata l'azione farmacologica dell'ossido ferrico (5) ed ora anche del solfuro ferroso.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio dell'Istituto di Farmacologia della R. Università di Padova.

(2) Presentata nella seduta del 4 novembre 1923.

(3) L. Sabbatani, *Ricerche farmacologiche sul ferro*: I. *Azione del cloruro ferrico.* Arch. di fisiol., XVI (1918), 63-80.

(4) L. Sabbatani e I. Salvioli. *Azione dell'ossido ferrico colloidale.* Ivi, XVI (1918), 81-94.

(5) L. Sabbatani, *Ricerche farmacologiche sul ferro*: III. *Azione del solfato ferroso.* Ivi, XIX (1921), 57-76.