ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Fisiologia. — *Sull'adattamento al clima e al lavoro in alta montagna, nel periodo dell'involuzione senile.* Memoria del Corrispondente B. MORPURGO e del dott. A. RABBENO.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Idromeccanica. — *Flusso di un liquido naturale in tubi, o canali scoperti, inclinati.* Nota di BRUTO CALDONAZZO, presentata dal Corrispondente U. CISOTTI [1].

Un liquido pesante, di densità ϱ e coefficiente di viscosità μ, scorre tra due piani paralleli, rispettivamente fondo e parete superiore di un canale, inclinati dell'angolo i sull'orizzonte. Il moto avvenga per filetti rettilinei paralleli alle rette di massima pendenza del fondo, e sia lo stesso in ogni piano verticale che taglia il fondo lungo una retta di massima pendenza. Basterà quindi studiare il moto in uno di questi piani verticali, che assumeremo come piano coordinato xy, fissando il semiasse positivo Ox sul fondo, col senso discendente. Il semiasse positivo Oy incontri la parete superiore. Si ha pertanto una vena piana compresa tra due pareti rigide parallele, la cui distanza indichiamo con $2h$, i filetti essendo tutti paralleli alle pareti.

Ammetteremo ancora che la distribuzione della pressione specifica p sia la stessa su ciascuna sezione normale della vena. Perciò p assieme all'unica componente u, secondo l'asse delle x, della velocità del liquido sono funzioni del tempo t e di y soltanto, non dipendendo da x.

Ammettiamo infine che sul fondo e sulla parete superiore il liquido aderisca completamente alle pareti, ($u = 0$ per $y = 0$ ed $y = 2h$).

In queste condizioni, noto il moto del liquido in un determinato istante (istante iniziale) vale a dire assegnata la distribuzione della velocità per $t = 0$, si può determinare il moto in tutti gli istanti successivi.

Dal punto di vista analitico si è condotti in sostanza ad una questione che si incontrà nello studio della propagazione del calore lungo un'asta, circostanza questa che facilita la risoluzione del problema permettendo di sfruttare risultati già noti.

Si passa poi facilmente dal caso considerato (canale coperto o tubo) al caso di un canale scoperto, nel quale il moto soddisfa alle stesse condi-

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1923.

zioni colla condizione in più che sul filetto superiore, che ora limita superiormente la vena, sia nulla l'azione tangenziale dell'aria a contatto col liquido. Ciò sarebbe rigorosamente verificato se il moto avvenisse nel vuoto e si verifica sensibilmente nel caso reale. L'integrale trovato pel moto in un canale coperto di profondità $2h$ è valido anche pel moto in un canale scoperto di profondità h, nelle condizioni considerate. Basta ammettere che la distribuzione iniziale della velocità nel primo sia simmetrica al filone $y = h$ del primo canale, che diventa pelo libero nel secondo.

In questa Nota trovo l'integrale generale del moto per il caso del tubo e studio la distribuzione degli sforzi. Trovo in particolare che le linee principali degli sforzi sono rettilinee ed inclinate di 45° sul fondo.

In una Nota successiva studierò il caso del canale scoperto. Dimostrerò allora l'esistenza di uno stato di regime tanto pel tubo come pel canale scoperto e che questo stato è lo stesso, qualunque sieno le condizioni iniziali.

1. *Posizione del problema nel canale coperto.* — Se ψ indica la funzione di corrente del moto piano di un liquido viscoso, l'unica equazione indefinita da cui dipende la ψ è (¹)

$$\Delta_2 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Delta_2 \psi \right\} = \mathrm{D} \,,$$

in cui D è il determinante funzionale di ψ e $\Delta_2 \psi$, rispetto ad x e y, ed è $\nu = \mu/\varrho$.

Nel nostro caso, per le ipotesi fatte, la ψ come u è funzione di t ed y soltanto. Risulta quindi $\mathrm{D} = 0$ e $\Delta_2 \psi = \dfrac{\partial u}{\partial y}$; l'equazione precedente quindi diventa

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} = 0 \,,$$

da cui, indicando con m una funzione di t,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = m(t) \,. \tag{1}$$

A sua volta la pressione p è data da (²)

$$\int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx - \int_{y_0}^{y} u \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\varrho} - \mathrm{U} = \text{funzione di } t \,,$$

in cui U, potenziale specifico del peso, è dato da

$$\mathrm{U} = g\,(x \,\mathrm{sen}\, i - y \cos i) \,,$$

convenendo di assumere $\mathrm{U} = 0$ nell'origine.

(¹) Cfr. U. Cisotti, *Sulle equazioni del moto piano dei liquidi viscosi*. Rendiconti del R. Ist. lombardo di scienze e lettere, vol. LVI, gennaio 1923, formula (6).

(²) U. Cisotti, loc. cit., formula (14).

Tenendo conto della (1) si ricava

$$mx + \frac{p}{\varrho} - g\,(x \operatorname{sen} i - y \cos i) = \text{funzione di } t\,.$$

Per le ipotesi fatte, p non dipende da x; deve essere perciò

$$m = g \operatorname{sen} i\,.$$

Ne segue

$$p = -\varrho\, g\, y \operatorname{sen} i + \text{funzione di } t\,. \tag{2}$$

L'equazione differenziale caratteristica (1) diviene pertanto

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g \operatorname{sen} i\,. \tag{3}$$

Oltre a questa equazione indefinita, la u deve soddisfare alla condizione iniziale

$$u = u_0(y)\,, \quad \text{per } t = 0\,, \tag{4}$$

in cui $u_0(y)$, che dà la distribuzione iniziale della velocità, è una assegnata funzione di y, limitata assieme alla sua derivata prima nell'intervallo $(0\,,\,2h)$.

Per la supposta aderenza completa del liquido sul fondo e sulla parete superiore del canale, deve essere inoltre

$$u = 0\,, \quad \text{per } y = 0 \quad \text{e per } y = 2h\,. \tag{5}$$

In base alla condizione iniziale (4) ed alle condizioni ai limiti (5), la funzione $u(y\,,t)$, soluzione della (3), risulta completamente individuata.

2. *Determinazione della* $u(y\,,t)$. — Poniamo

$$u = \varphi(y\,,t) + \frac{g \operatorname{sen} i}{2\nu}\, y(2h - y)\,. \tag{6}$$

Sostituendo nelle (3), (4) e (5) si trova che la nuova funzione $\varphi(y\,,t)$ deve soddisfare all'equazione indefinita

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{7}$$

ed alle condizioni ai limiti

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_0(y) = u_0(y) - \dfrac{g \operatorname{sen} i}{2\nu}\, y(2h - y)\,, \quad \text{per } t = 0\,, \\ \varphi = 0\,, \quad \text{per } y = 0 \quad \text{e per } y = 2h\,. \end{array} \right. \tag{8}$$

La (7) coincide con l'equazione differenziale caratteristica per la propagazione del calore lungo un'asta. La teoria della propagazione del calore ci fornisce senz'altro l'integrale della (7) soddisfacente alle (8) e ci assicura della sua unicità ([1]).

([1]) Cfr. Riemann-Weber, *Differentialgleichungen*, vol. II, §§ 34, 45.

Basta sviluppare la $\varphi_0(y)$, nell'intervallo $(0, 2h)$, nella serie di Fourier

$$\varphi_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2h},$$

per cui è

$$A_n = \frac{1}{h}\int_0^{2h} \varphi_0(\alpha) \operatorname{sen} \frac{n\pi\alpha}{2h}\, d\alpha. \tag{9}$$

L'integrale richiesto è

$$\varphi(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2\nu}{4h^2}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2h}. \tag{10}$$

Per le ipotesi fatte, la $\varphi_0(y)$ e la sua derivata prima sono limitate nell'intervallo $(0, 2h)$ ed è inoltre $\nu > 0$. Perciò la serie del secondo membro della (10) è certamente convergente nel campo $0 \leq t \leq \infty$, $0 \leq y \leq 2h$ e la funzione da essa rappresentata è limitata assieme alla sua derivata prima. Lo stesso si può ripetere riguardo alla $u(y, t)$ data dalla (6) e che ora in virtù della (10) è completamente individuata e costituisce l'integrale generale del moto studiato.

La velocità delle singole particelle si conserva sempre finita, circostanza questa che si accorda con la nostra intuizione fisica del moto e giustifica l'ipotesi fatta che la u_0 sia limitata.

3. *Distribuzione degli sforzi.* — Fissato un elemento lineare ds in seno al liquido in moto, siano $\mathbf{t}$ ed $\mathbf{n}$ i vettori unitari che individuano il verso dell'elemento e la normale all'elemento stesso, nel piano del moto e tali da determinare una coppia di assi congruenti agli assi x ed y. Lo sforzo unitario, che attraverso l'elemento lineare viene esercitato sul liquido che si trova dalla parte del vettore $\mathbf{n}$ dal liquido che si trova dalla parte opposta, ha per componenti secondo $\mathbf{t}$ ed $\mathbf{n}$ [1]

$$\begin{cases} \Phi_{nt} = \mu \left\{ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial s^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial n^2} \right\}, \\ \Phi_{nn} = p + 2\mu \dfrac{\partial^2\psi}{\partial s\, \partial n}. \end{cases} \tag{11}$$

Assunti $\mathbf{t}$ ed $\mathbf{n}$ paralleli ad x ed y, si ha

$$\Phi_{yx} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \Phi_{yy} = p. \tag{12}$$

Risulta di qui che sulle linee di corrente gli sforzi normali coincidono colla pressione che, a parità di condizioni, si avrebbe se il liquido fosse perfetto. La pressione inoltre, per la (2), essendo sulla parete superiore

$$p_0 = -2\varrho\, gh \cos i + \text{funzione di } t,$$

[1] Cfr. U. Cisotti, loc. cit., formula (13).

si può mettere sotto la forma

$$p = p_0 + \varrho g \cos i\,(2h - y).$$

Come si vede, la pressione è quella stessa che si avrebbe nel caso statico, in canale orizzontale scoperto, la forza di gravità essendo ridotta nel rapporto da 1 a $\cos i$.

Per l'espressione ora trovata per p e per la circostanza rilevata sopra che $\frac{\partial u}{\partial y}$ è limitata, i due sforzi (12) sono sempre finiti.

Se **t** ed **n** sono scelti comunque ed α indica il generico angolo che **t** fa con x, essendo ora

$$\frac{\partial}{\partial s} = \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} ,$$

le (11) divengono

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \Phi_{nt} = -\mu \cos 2\alpha \dfrac{\partial u}{\partial y} , \\ \Phi_{nn} = p + \mu \operatorname{sen} 2\alpha \dfrac{\partial u}{\partial y} . \end{cases}$$

L'espressione ora trovata per Φ_{nt} mette in evidenza che lo sforzo tangenziale si annulla per $\alpha = \pm \pi/4$; quindi le linee degli sforzi principali appartengono alle rette parallele alle bisettrici degli assi coordinati.

Matematica. — *Sur les invariants de l'élément linéaire projectif d'une surface.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI [1].

1. Une surface S non réglée étant donnée, on peut former deux formes différentielles ($u = u_1$, $v = u_2$ étant les coordonnées curvilignes):

$$\text{(1)} \begin{cases} \varphi_2 = \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k = a_{11}\, du^2 + 2a_{12}\, du\, dv + a_{22}\, dv^2 , \\ \varphi_3 = \Sigma a_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l = a_{111}\, du^3 + 3a_{112}\, du^2 dv + 3a_{122}\, du\, dv^2 + a_{222}\, dv^3 \end{cases}$$

Ces formes ne changent pas si l'on soumet S soit à une homographie, soit à une déformation projective [2].

(1) Presentata nella seduta del 4 novembre 1923.

(2) Fubini, *Fondamenti di geom. proiettivo-differenz.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo 43 (1918-19), § 1.