ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

si può mettere sotto la forma

$$p = p_0 + \varrho g \cos i \, (2h - y).$$

Come si vede, la pressione è quella stessa che si avrebbe nel caso statico, in canale orizzontale scoperto, la forza di gravità essendo ridotta nel rapporto da 1 a $\cos i$.

Per l'espressione ora trovata per p e per la circostanza rilevata sopra che $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ è limitata, i due sforzi (12) sono sempre finiti.

Se $\mathbf{t}$ ed $\mathbf{n}$ sono scelti comunque ed α indica il generico angolo che $\mathbf{t}$ fa con x, essendo ora

$$\frac{\partial}{\partial s} = \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} \, ,$$

le (11) divengono

$$(13) \qquad \begin{cases} \Phi_{nt} = -\mu \cos 2\alpha \dfrac{\partial u}{\partial y} \, , \\ \Phi_{nn} = p + \mu \operatorname{sen} 2\alpha \dfrac{\partial u}{\partial y} \, . \end{cases}$$

L'espressione ora trovata per Φ_{nt} mette in evidenza che lo sforzo tangenziale si annulla per $\alpha = \pm \pi/4$; quindi le linee degli sforzi principali appartengono alle rette parallele alle bisettrici degli assi coordinati.

Matematica. — *Sur les invariants de l'élément linéaire projectif d'une surface.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI [1].

1. Une surface S non réglée étant donnée, on peut former deux formes différentielles ($u = u_1$, $v = u_2$ étant les coordonnées curvilignes):

$$(1) \begin{cases} \varphi_2 = \Sigma a_{ik} \, du_i \, du_k = a_{11} \, du^2 + 2a_{12} \, du \, dv + a_{22} \, dv^2 \, , \\ \varphi_3 = \Sigma a_{ikl} \, du_i \, du_k \, du_l = a_{111} \, du^3 + 3a_{112} \, du^2 dv + 3a_{122} \, du \, dv^2 + a_{222} \, dv^3 \end{cases}$$

Ces formes ne changent pas si l'on soumet S soit à une homographie, soit à une déformation projective [2].

[1] Presentata nella seduta del 4 novembre 1923.

[2] Fubini, *Fondamenti di geom. proiettivo-differenz.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo 43 (1918-19), § 1.

Elles sont liées par les relations [1]

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Sigma a^{ik} a_{ikl} = 0 \\ \begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + A^2 = 0 . \end{array}\right.$$

2. Je pose

$$(3)\qquad Du_i = \Sigma \vartheta^{ik} a_{rs}\, du_s = \Sigma a^{ik} \vartheta_{rs}\, du_s ;$$

on a réciproquement

$$(3)_{bis}\qquad du_i = \varepsilon \Sigma \vartheta^{ik} a_{rs}\, Du_s = \varepsilon \Sigma a^{ir} \vartheta_{rs}\, Du_s .$$

On a alors

$$(1)_{bis}\qquad \varphi_2 = \Sigma \vartheta_{ik}\, du_i\, Du_k = -\varepsilon \Sigma a_{ik}\, Du_i\, Du_k$$

et si $\Sigma b_{ik}\, du_i\, du_k$ est une forme quadratique *conjuguée* a φ_2 (c'est-à-dire si l'on a $\Sigma a^{ik} b_{ik} = 0$)

$$(4)\qquad \Sigma b_{ik}\, Du_i\, Du_k = \varepsilon \Sigma b_{ik}\, du_i\, du_k .$$

J'introduis encore une forme cubique φ_3' en posant

$$(5)\qquad \varphi_3' = \Sigma a_{ikl}\, du_i\, du_k\, Du_l = \Sigma b_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l \quad (^2) .$$

On a les identités

$$(6)\qquad \varphi_3^2 - \varepsilon \varphi_3'^2 - \tfrac{1}{2} \varphi_2^3 = 0 ,$$

$$(5)_{bis}\qquad \left\{\begin{array}{l} b_{ikl} = \Sigma \vartheta_{ri}\, a^r_{kl} \ , \ a_{ikl} = \varepsilon \Sigma \vartheta_{ri}\, a^r_{kl} \ , \\ b^r_{kl} = \Sigma \vartheta^{ir} a_{ikl} \ , \ a^r_{kl} = \varepsilon \Sigma \vartheta^{ir} b_{ikl} \ , \end{array}\right.$$

$$(7)\qquad \Sigma a^{ikl} a_{ikl} = -\varepsilon \Sigma b^{ikl} b_{ikl} = 2 \quad , \ \Sigma a^{ikl} b_{ikl} = 0 ,$$

$$(7)_{bis}\qquad \Sigma a^{ik}_r\, a_{iks} = -\varepsilon \Sigma b^{ik} b_{iks} = a_{rs} \ , \ \Sigma a^{ik}_r\, b_{iks} = \vartheta_{rs} .$$

3. De la première ligne de (2) on peut déduire facilement qu'il existe une forme linéaire covariante $\Sigma \psi_i\, du_i$ telle que l'on ait les identités suivantes

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{ikl,r} = \varepsilon \Sigma \vartheta_{rs}\, \psi^s \cdot b_{ikl} \\ b_{ikl,r} = \ \ \Sigma \vartheta_{rs}\, \psi^s \cdot a_{ikl} . \end{array}\right.$$

(1) Je fais usage des notations habituelles du calcul absolu, φ_2 étant la forme fondamentale. Ainsi $A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$, $a^{11} = \frac{a_{22}}{A}$, $a_{ikl,r}$ sont les dérivées covariantes des a_{ikl} etc. Je pose aussi

$$\varepsilon = \frac{|A|}{A} = \operatorname{sgn} A = \pm 1 \ , \ \vartheta_{11} = 0 \ , \ \vartheta_{12} = \sqrt{|A|} \ , \ \vartheta_{21} = -\sqrt{|A|} \ , \ \vartheta_{22} = 0 .$$

(2) Je suppose que les b_{ikl} forment un système covariant symétrique.

A l'aide des ψ_i, on exprime aisément les trois *invariants du premier ordre* du système φ_2, φ_3:

$$\Phi = \Sigma \psi_i \psi^i \;,\quad \Psi = \Sigma a^{ikl} \psi_i \psi_k \psi_l \;,\quad \Psi' = \Sigma b^{ikl} \psi_i \psi_k \psi_l \tag{9}$$

liés par l'identité

$$\Psi^2 - \varepsilon \Psi'^2 = \tfrac{1}{2} \Phi^3 . \tag*{(9)$_{bis}$}$$

4. A l'aide des dérivées covariantes $\psi_{i,k}$ des ψ_i on peut exprimer les quatre *invariants du second ordre*

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{K} = -\frac{1}{3} \Sigma a^{ik} \psi_{i,k} \;, & \mathrm{H} = \Sigma \vartheta^{ik} \psi_{i,k} \\ \Theta = \Sigma a^{ikl} \psi_{i,k} \psi_l \;, & \Theta' = \Sigma b^{ikl} \psi_{ik} , \psi_l . \end{array}\right. \tag{10}$$

On peut démontrer que K est la *courbure de φ_2*.

On a les identités suivantes (¹):

$$\left\{\begin{aligned} d\Phi &= \left(-3\mathrm{K} + 2\,\frac{\Psi\Theta - \varepsilon \Psi' \Theta'}{\Phi^2}\right) \Sigma \psi_i \, du_i \,+ \\ &\qquad + \varepsilon \left(-\mathrm{H} + 2\,\frac{\Psi'\Theta - \Psi \Phi'}{\Phi^2}\right) \Sigma \psi_i \, \mathrm{D}u_i \,, \\ d\Psi &= \left(-\tfrac{3\varepsilon}{2}\,\frac{\Psi'\mathrm{H}}{\Phi} - \tfrac{9}{2}\,\frac{\Psi\mathrm{K}}{\Phi} + \tfrac{3}{2}\,\Theta\right) \Sigma \psi_i \, du_i \,+ \\ &\qquad + \varepsilon \left(-\Psi' - \tfrac{3}{2}\,\frac{\Psi\mathrm{H}}{\Phi} - \tfrac{9}{2}\,\frac{\Psi'\mathrm{K}}{\Phi} - \tfrac{3}{2}\,\Theta'\right) \Sigma \psi_i \, \mathrm{D}u_i \,, \\ d\Psi' &= \left(-\tfrac{3}{2}\,\frac{\Psi\mathrm{H}}{\Phi} - \tfrac{9}{2}\,\frac{\Psi'\mathrm{K}}{\Phi} + \tfrac{3}{2}\,\Theta'\right) \Sigma \psi_i \, du_i \,+ \\ &\qquad + \left(-\Psi - \tfrac{3\varepsilon}{2}\,\frac{\Psi'\mathrm{H}}{\Phi} - \tfrac{9}{2}\,\frac{\Psi\mathrm{K}}{\Phi} - \tfrac{3}{2}\,\Theta\right) \Sigma \psi_i \, \mathrm{D}u_i \,. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

5. Donnons-nous deux couples de formes φ_2, φ_3 et $\overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_3$ (²) et cherchons s'il est possible de trouver une transformation à déterminant fonctionnel positif (³) qui porterait φ_2 en $\overline{\varphi}_2$ et φ_3 en $\overline{\varphi}_3$. Il faut considérer, outre le paramètre différentiel habituel

$$\Delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \Sigma a^{ik} \, \mathrm{P}_i \, \mathrm{Q}_k \quad , \quad \Delta(\mathrm{P}, \mathrm{P}) = \Delta(\mathrm{P})$$

(¹) Je suppose $\Phi \gtrless 0$. Si $\Phi = 0$, on a des identités analogues que je omets d'écrire ici.

(²) Les variables dans les formes $\overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_3$ sont $\overline{u} = \overline{u}_1$, $\overline{v} = \overline{u}_2$. Les invariants $\Phi, \Psi \ldots$ déduits des $\overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_3$ seront indiqués par $\overline{\Phi}, \overline{\Psi}, \ldots$.

(³) C'est seulement pour simplifier les énoncés que je fais cette supposition.

le paramètre différentiel

$$\mathbf{E}(P,Q) = \Sigma a^{ikl} P_i P_k Q_l \quad , \quad \mathbf{E}(P,P) = \mathbf{E}(P).$$

En premier lieu, supposons qu'on puisse trouver deux des invariants

$$\Phi, \Psi, H, K, \Theta, \Theta', \tag{12}$$

soient P et Q, dont le Jacobien soit différent de zéro.

Alors une transformation à déterminant fonctionnel positif porte φ_2 en $\overline{\varphi}_2$ et φ_3 en $\overline{\varphi}_3$ alors et alors seulement qu'elle satisfait aux équations

$$\overline{P} = P \ , \ \overline{Q} = Q \, ,$$

$$\overline{\Delta}(\overline{P}) = \Delta(P) \ , \ \overline{\Delta}(\overline{P}, \overline{Q}) = \Delta(P, Q) \ , \ \overline{\Delta}(\overline{Q}) = \Delta(Q) \, ,$$

$$\overline{\mathbf{E}}(\overline{P}) = \mathbf{E}(P) \, , \, \overline{\mathbf{E}}(\overline{P}, \overline{Q}) = \mathbf{E}(P,Q) \, , \, \overline{\mathbf{E}}(\overline{Q}, \overline{P}) = \mathbf{E}(Q,P) \, , \, \overline{\mathbf{E}}(\overline{Q}) = \mathbf{E}(Q) \, .$$

On voit en particulier que les transformations en question, si elles existent, sont en nombre limité et peuvent être déterminées par des éliminations et dérivations.

Dans le cas général, où $\dfrac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(u, v)} \neq 0$, les conditions peuvent s'écrire bien plus simplement:

$$\overline{\Phi} = \Phi \ , \ \overline{\Psi} = \Psi \ , \ \overline{\Psi}' = \Psi' \ , \ \overline{H} = H \ , \ \overline{K} = K \ , \ \overline{\Theta} = \Theta \ , \ \overline{\Theta}' = \Theta' \, .$$

En second lieu, supposons que tous les invariants (12) soient fonctions d'un d'entre eux, mais excluons encore la possibilité que Φ et Ψ soient simultanément des constantes. Alors pour l'existence d'une transformation de φ_2, φ_3 en $\overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_3$ il faut qu'il existe entre $\overline{\Phi}, \overline{\Psi}, \overline{H}, \overline{K}, \overline{\Theta}, \overline{\Theta}'$ *les mêmes* relations.

D'ailleurs, s'il en est ainsi, il existe ∞^1 transformations qui peuvent être trouvées par des quadratures.

Enfin, si Φ et Ψ sont des constantes, les conditions sont simplement $\overline{\Phi} = \Phi$, $\overline{\Psi} = \Psi$. Il existe alors ∞^2 transformations qu'on trouve par des quadratures.

6. Un exposé complet paraîtra dans les Publications de l'Université Masaryk, Brno, Tchécoslovaquie.