ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

proporzioni in cui gli uni e gli altri vi sono contenuti e dalle possibilità di reazione che ad essi vengono offerte quando si scalda l'acciaio nel vuoto a temperatura elevata. Ora, la disossidazione con le ferro leghe significa, il più delle volte, anche ricarburazione del bagno, e nessuna meraviglia perciò che l'aggiunta di disossidante e ricarburante possa dare un prodotto capace di svolgere un volume maggiore di gas carburato.

Ma tranne che non intervenga la ricarburazione ad offrire maggiori possibilità di reazione fra ossidi e carburo e provocare quindi lo sviluppo di un maggiore volume di gas, la disossidazione deve avere sempre per conseguenza, anche per l'azione riducente che i disossidanti esercitano sui gas carburati, una diminuzione nel volume totale di gas estraibili a caldo.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Corrispondenza puntuale fra due superficie e rappresentazione conforme.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

In seguito ad una ricerca da me iniziata sulle proprietà proiettivo-differenziali di una superficie dello spazio ordinario secondo il metodo di Fubini, ed a conversazioni e a relazioni epistolari con i professori Bianchi e Castelnuovo, siamo pervenuti ai risultati qui appresso enunciati. Di essi, qualora non sia indicato esplicitamente l'Autore, è da ritenersi che siano comuni ad almeno due di noi.

I. *Una corrispondenza puntuale qualsiasi fra due superficie (di S_3), regolare nell' intorno (almeno di 2° ordine) di punti corrispondenti generici, determina una corrispondenza birazionale (cremoniana) del 3° ordine fra le stelle di piani uscenti da punti corrispondenti delle due superficie (considerando corrispondenti piani osculatori a curve corrisp. in punti corrispondenti).*

II. *Nella corrispondenza precedente i piani fondamentali di ciascuna stella si raccolgono tutti nel piano tangente alla superficie meno, in generale, due. Ai piani di un fascio in una stella corrispondono nell'altra piani inviluppanti un cono di 3ª classe.*

V'è un solo fascio di piani (se la corrispondenza è generale) cui corrisponde un fascio di piani: l'asse del fascio è, in ciascuna stella, la retta intersezione dei due piani fondamentali distinti da quello tangente.

Agli assi dei due fasci di piani corrispondentisi nelle due stelle dò il nome di *assi della corrispondenza*: questa (purchè sia generica) individua dunque due congruenze ben determinate (una retta per ogni punto di una superficie, non situata nel piano tangente in esso) e una corrispondenza fra le loro rette.

Conviene aggiungere un'altra nozione. Data una superficie e per ogni suo punto una retta (non situata nel piano tangente), rimane definito sulla superficie un sistema doppiamente infinito di curve dalla condizione che i piani osculatori ad esse passanti per un punto della superficie formino fascio intorno alla retta data che passa per quel punto (sicchè dati un punto e una tangente della superficie, la curva del sistema che possiede questi elementi ha per piano osculatore ivi quello determinato dalla tangente e dalla retta data). Daremo ad un tale sistema di curve il nome di *sistema assiale* (1).

L'ultima parte del teorema II si enuncia allora così:

III. *In una corrispondenza puntuale generica fra due superficie esiste un solo sistema assiale di curve sopra una superficie cui corrisponda un sistema assiale dell'altra.*

Per es., date due superficie isometriche (o isometrico simili) la congruenza degli assi per ciascuna superficie è quella delle sue normali, e il sistema assiale che si conserva è quello delle geodetiche.

La determinazione dell'asse relativo ad un punto di una superficie può compiersi, indipendentemente dalla corrispondenza birazionale I e dal teorema II, in base al teorema (sostanzialmente equivalente):

IV. *Si considerino le curve di una superficie aventi un flesso in suo punto (cioè, se si vuole, tre punti infinitamente vicini della superficie situati su ciascuna tangente asintotica): i piani osculatori alle curve corrispondenti nel punto corrisp. dell'altra superficie si tagliano lungo l'asse ad esso relativo.*

V. *Una corrispondenza generica fra due superficie subordina una proiettività* Ω *fra le stelle di rette uscenti da punti corrispondenti quando ad una retta (asse di un fascio) di una stella si faccia corrispondere nell'altra la retta per cui passano i piani tangenti cuspidali del cono di cui al teor.* II. *Il prodotto di* Ω *per la proiettività* $\bar{\Omega}$ *costruita in modo analogo a partire dall'altra superficie è un'omologia nella stella relativa al punto della prima superficie: la retta unita, non situata nel piano tangente, è l'asse della corrispondenza in quel punto. La caratteristica dell'omologia è un invariante della corrispondenza (anche per applicabilità proiettive delle due superficie)* (**Bompiani**).

Fanno eccezione ai teoremi precedenti, cioè la corrispondenza non è più da considerarsi generica, i due casi seguenti:

VI. *Se la corrispondenza fa passare da un sistema di asintotiche di una superficie ad un sistema di asintotiche dell'altra, accade che: o nessun*

(1) Questi sistemi di curve sono già stati considerati da G. Fubini: *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie* (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LIII, 1918, pp. 1032-1043; § 2, Caso 1°).

sistema assiale di curve si conserva, oppure vi sono ∞^1 *fasci di piani cui corrispondono (nella corrispondenza biraz.* I) *pure fasci di piani; gli assi di questi fasci sono, per ciascuna superficie, in un piano.*

La seconda eventualità si presenta quando alle curve aventi un flesso e tangenti nel punto di flesso all'asintotica che si conserva nella trasformazione corrispondono nell'altra superficie curve dotate di flesso (nel punto corrispondente).

VII. *Se nella corrispondenza si conservano tutt'e due i sistemi di asintotiche accade che: o non esistono sistemi assiali corrispondenti, oppure ad ogni sistema assiale di una superficie corrisponde un sistema assiale dell'altra: in quest'ultimo caso* (1) *la corrispondenza è un'applicabilità proiettiva (secondo Fubini).*

Si presenta questo fatto allora e solo quando ai tre punti infinitamente vicini di una superficie appartenenti a ciascuna tangente asintotica corrispondono punti situati nello stesso modo dell'altra superficie (Castelnuovo) (2).

Corollario notevole del teorema IV è il seguente:

VIII. *Data una corrispondenza generica (che non conservi asintotiche) fra una superficie ed una quadrica, la congruenza degli assi relativa alla superficie si ottiene prendendo in ciascun punto di essa la retta intersezione dei piani osculatori alle due curve della superficie corrispondenti alle generatrici della quadrica e passanti per il punto* (Bompiani).

In particolare: se alle generatrici rettilinee della quadrica corrispondono geodetiche della superficie, la congruenza dei suoi assi è quella delle sue normali, e il sistema assiale quello delle geodetiche (Bianchi).

Segnaliamo ancora i risultati seguenti:

IX. *Soltanto sulle quadriche le linee d'ombra (illuminazione per raggi paralleli) formano un sistema assiale* (Bianchi).

X. *Sulla sfera le traiettorie isogonali di un sistema qualsiasi semplicemente infinito di linee formano un sistema assiale* (Castelnuovo); *detta proprietà è caratteristica della sfera* (Bompiani).

XI. *Due superficie coniugate in deformazione (secondo il Bianchi) si corrispondono in un'applicabilità proiettiva permutabile con le ordinarie applicabilità* (Bianchi).

* * *

L'applicazione dei teoremi generali esposti alla rappresentazione conforme ci ha dato quanto segue:

XII. *Se in una rappresentazione conforme fra due superficie la congruenza degli assi relativa ad una di esse è quella delle sue normali, allora:*

(1) Per un teorema di Čech; se ne può vedere una dimostrazione di G. Fubini nel Bollettino della Unione Matematica Italiana (vol. I, 1922, pag. 50).

(2) Avevamo già osservato che è un'applicabilità proiettiva una corrispondenza conforme della sfera su sè stessa (Bianchi) e più in generale qualsiasi corrispondenza fra due quadriche che ne conservi le generatrici rettilinee (Bompiani).

o avviene altrettanto per l'altra e le due superficie sono isometrico-simili; oppure la seconda superficie è necessariamente una sfera; e viceversa.

Nella rappresentazione conforme di una superficie sopra una sfera, detto e^σ il modulo della rappresentazione (rapporto fra gli elementi lineari corrispondenti della sfera e della superficie) si ha ancora:

XIII. *Indicati con l_i i coseni direttori dell'asse relativo ad un punto x_i della sfera si ha $\sum_1^3 {}_i l_i\, dx_i \Big/ \sum_1^3 {}_i l_i x_i = d\sigma$; l'essere questa espressione un differenziale esatto può interpretarsi dicendo che la congruenza degli assi relativa alla sfera può rendersi normale con una rifrazione (sulla sfera) il cui indice è il coseno dell'angolo di incidenza* (Castelnuovo).

XIV [1]. *La congruenza degli assi (relativa alla sfera) non dipende dalla forma della superficie che si rappresenta sulla sfera, ma solo dal modulo della rappresentazione.*

XV. *Gli assi risultano ortogonali alle linee di modulo costante* ($\sigma =$ cost.) *sulla sfera; in altri termini: le proiezioni ortogonali degli assi sui piani tangenti inviluppano le traiettorie ortogonali alle linee* $\sigma =$ cost.

Di più, se θ è l'angolo che l'asse relativo ad un punto della sfera forma con il raggio passante per il punto e λ l'angolo dell'asse con la direzione superficiale di elemento lineare ds si ha $\cos\lambda / \cos\theta = d\sigma/ds$.

In particolare, prendendo ds in direzione ortogonale a $\sigma =$ cost., *si ha il gradiente di* $\sigma = d\sigma/ds = \operatorname{tg}\theta$

Questo teorema determina completamente la congruenza degli assi (relativa alla sfera; l'altra è già determinata da XII).

XVI. *Le sviluppabili della congruenza degli assi della sfera segano su di essa un doppio sistema ortogonale; e viceversa ad ogni tale congruenza corrisponde una determinata rappresentazione conforme.*

In rapporto alla prima parte del teorema XV può chiedersi quando accada, nella rappresentazione conforme di una superficie sopra un'altra, che le proiezioni ortogonali degli assi di una di esse sui proprî piani tangenti inviluppino le traiettorie ortogonali alle linee $\sigma =$ cost. La risposta è la seguente:

XVII. *Nell'ipotesi ora fatta, o quelle traiettorie costituiscono un sistema di asintotiche sulla superficie che si considera; o una delle due superficie (quella su cui avviene il fatto richiesto) è una sfera; o infine sulle due superficie si corrispondono (oltre alle linee isotrope) le linee di curvatura.*

L'ultimo fatto si presenta p. es. quando si considera una superficie a curvatura media costante (e gaussiana variabile) e quella ben determinata fra le superficie parallele che risulta rappresentata in modo conforme su di essa (per mezzo delle normali).

[1] I teoremi che seguono, fino al termine della Nota, sono miei.

Per due superficie qualsiasi in rappr. conforme vale il teorema:

XVIII. *Si considerino sulle due superficie linee assiali corrispondenti e, in punti corrispondenti, i loro angoli di contingenza geodetica. Se si deformano per applicabilità le due superficie (variano i due sistemi assiali che si corrispondono, ma) la differenza fra detti angoli di contingenza rimane inalterata.*

Le linee assiali corrispondenti sulle due superficie hanno lo stesso angolo di contingenza nei punti nei quali riescono ortogonali alle linee di modulo costante.

Una proprietà metrica affatto generale per una corrispondenza (anche non conforme) fra due superficie si ha dalla considerazione seguente.

Data una linea sopra una di esse si consideri la linea assiale definita dal teor. III che le è tangente in un punto: l'angolo di contingenza di queste due linee diviso per l'elemento lineare comune nel punto. si dirà *curvatura assiale* della linea data (se la corrisp. è un'applicabilità si ha la curvatura geodetica). Orbene:

XIX. *Il rapporto delle curvature assiali di due linee corrispondenti in punti corrisp. è uguale all'inverso del rapporto dei quadrati dei loro elementi lineari;* quindi in particolare

XX. *In una rappresentazione conforme il rapporto delle curvature assiali di due linee corrispondenti qualsiansi non dipende che dal punto ed è uguale all'inverso del quadrato del modulo.*

Darò in un altro lavoro il metodo da me tenuto per la dimostrazione di questi e di altri teoremi.

Idromeccanica. — *Flusso di un liquido naturale in tubi, o canali scoperti, inclinati. Moto di regime.* Nota di BRUTO CALDONAZZO, presentata dal Corrispondente U. CISOTTI.

4. *Moto in un canale scoperto* [1]. — Nel caso di un canale scoperto, di profondità h, nel quale il moto avviene ancora per filetti rettilinei paralleli al fondo, l'equazione indefinita di moto è ancora la (3). Ammessa l'aderenza completa sul fondo è $u = 0$, per $y = 0$.

Sul pelo superficiale, avendo esclusa ogni azione tangenziale dell'aria, deve essere $\Phi_{yx} = 0$, per $y = h$, ossia, per la prima delle (12)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \,, \quad \text{per } y = h \,.$$

Infine, per le condizioni iniziali, dovrà essere $u = u_0(y)$, per $t = 0$, in cui la $u_0(y)$, che definisce la distribuzione iniziale della velocità, è una funzione assegnata nell'intervallo $(0, h)$, finita assieme alla sua derivata

[1] V. questi Rendiconti, pag. 331.