ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Per due superficie qualsiasi in rappr. conforme vale il teorema:

XVIII. *Si considerino sulle due superficie linee assiali corrispondenti e, in punti corrispondenti, i loro angoli di contingenza geodetica. Se si deformano per applicabilità le due superficie (variano i due sistemi assiali che si corrispondono, ma) la differenza fra detti angoli di contingenza rimane inalterata.*

Le linee assiali corrispondenti sulle due superficie hanno lo stesso angolo di contingenza nei punti nei quali riescono ortogonali alle linee di modulo costante.

Una proprietà metrica affatto generale per una corrispondenza (anche non conforme) fra due superficie si ha dalla considerazione seguente.

Data una linea sopra una di esse si consideri la linea assiale definita dal teor. III che le è tangente in un punto: l'angolo di contingenza di queste due linee diviso per l'elemento lineare comune nel punto. si dirà *curvatura assiale* della linea data (se la corrisp. è un'applicabilità si ha la curvatura geodetica). Orbene:

XIX. *Il rapporto delle curvature assiali di due linee corrispondenti in punti corrisp. è uguale all'inverso del rapporto dei quadrati dei loro elementi lineari;* quindi in particolare

XX. *In una rappresentazione conforme il rapporto delle curvature assiali di due linee corrispondenti qualsiansi non dipende che dal punto ed è uguale all'inverso del quadrato del modulo.*

Darò in un altro lavoro il metodo da me tenuto per la dimostrazione di questi e di altri teoremi.

Idromeccanica. — *Flusso di un liquido naturale in tubi, o canali scoperti, inclinati. Moto di regime.* Nota di BRUTO CALDONAZZO, presentata dal Corrispondente U. CISOTTI.

4. *Moto in un canale scoperto* [1]. — Nel caso di un canale scoperto, di profondità h, nel quale il moto avviene ancora per filetti rettilinei paralleli al fondo, l'equazione indefinita di moto è ancora la (3). Ammessa l'aderenza completa sul fondo è $u = 0$, per $y = 0$.

Sul pelo superficiale, avendo esclusa ogni azione tangenziale dell'aria, deve essere $\Phi_{yx} = 0$, per $y = h$, ossia, per la prima delle (12)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \,, \quad \text{per } y = h \,.$$

Infine, per le condizioni iniziali, dovrà essere $u = u_0(y)$, per $t = 0$, in cui la $u_0(y)$, che definisce la distribuzione iniziale della velocità, è una funzione assegnata nell'intervallo $(0, h)$, finita assieme alla sua derivata

[1] V. questi Rendiconti, pag. 331.

prima. Introducendo ancor qui la funzione $\varphi(y,t)$, secondo la (6), si trova che essa deve soddisfare alla (7) ed alle condizioni limiti

$$(14)\quad \begin{cases} \varphi = \varphi_0(y) = u_0(y) - \dfrac{g \operatorname{sen} i}{2\nu} y(2h-y)\,, \quad \text{per } t=0\,; \\ \varphi = 0\,, \quad \text{per } y=0\,; \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0\,, \quad \text{per } y = h\,. \end{cases}$$

Per determinare una tale $\varphi(y,t)$ consideriamo nell'intervallo $(0,2h)$ la funzione $u_0(y)$ che assume i valori già assegnati nella prima metà $(0,h)$ dell'intervallo e che nei punti della seconda metà $(h,2h)$ assume valori eguali a quelli assunti nei punti simmetrici della prima parte, rispetto alla retta $y=h$. In altre parole, nell'intervallo $(0,2h)$ è $u_0(2h-y)=u_0(y)$; per conseguenza risulta pure $\varphi_0(2h-y)=\varphi_0(y)$.

Segue allora dalla (9)

$$\mathrm{A}_{2n}=0\;,\quad \mathrm{A}_{2n-1}=\frac{2}{h}\int_0^h \varphi_0(\alpha) \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2h}\,d\alpha\,.$$

Sostituendo nella (10) otteniamo

$$(15)\qquad \varphi(y,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_{2n-1}\, e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\nu}{4h^2}t} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi y}{2h}\,.$$

La serie che definisce la φ è convergente e derivabile a termine a termine rispetto ad y e la sua derivata si annulla per $y=h$, come era richiesto. È soddisfatta quindi l'ultima delle condizioni ai limiti (14); le altre due sono certamente soddisfatte, perchè la φ soddisfa alle (8) che includono queste due condizioni.

Sostituendo la φ ora trovata nella (6) abbiamo la $u(y,t)$, che costituisce l'integrale generale del moto considerato in un canale scoperto.

Quanto alla distribuzione degli sforzi, valgono ancora le (13) e le linee principali degli sforzi hanno la stessa configurazione di quelle pel caso del canale coperto.

5. *Moto di regime.* — La funzione $\varphi(y,t)$ definita dalla (10), come pure quella definita dalla (15), ricordando che ν è positivo, col crescere indefinito del tempo t tende a zero. Perciò, come risulta dalla (6), tanto nel tubo quanto nel canale scoperto, col crescere del tempo va sempre più attenuandosi il termine $\varphi(y,t)$ che rappresenta il contributo portato alla velocità dalla distribuzione iniziale della velocità stessa. Al limite si ottiene

$$\lim_{t=\infty} u = \mathrm{U} = \frac{g \operatorname{sen} i}{2\nu}\, y(2h-y)\,,$$

in cui è $0 \leq y \leq 2h$ pel tubo, $0 \leq y \leq h$ pel canale scoperto. *Esiste quindi* *un moto di regime*, *indipendente dalle condizioni iniziali* e che dipende solo dalla inclinazione, dall'altezza della vena in moto e dalla viscosità del liquido. Questo moto di regime è stazionario. Nel canale coperto la velocità di regime U è eguale in punti simmetrici al filetto mediano e nella metà inferiore coincide con quella che si verifica nei punti corrispondenti del canale scoperto. Possiamo limitarci pertanto a considerare la U in quest'ultimo caso. Essa cresce dal valore zero sul fondo al valore massimo

$$\text{(17)} \qquad \mathrm{V} = \frac{g \operatorname{sen} i}{2\nu} h^2 ,$$

raggiunto sul pelo libero. Introducendo questo massimo nell'espressione di U e la distanza $\xi = h - y$ di un punto dal pelo libero, questa si può scrivere

$$\text{(18)} \qquad \mathrm{U} = \mathrm{V} - \mathrm{V} \frac{\xi^2}{h^2} ,$$

che qualitativamente coincide colla legge parabolica del Bazin [1].

Dalla (18) segue facilmente che la portata del canale, di larghezza unitaria, nello stato di regime è

$$q = \frac{2}{3} \varrho \mathrm{V} h$$

e che la velocità media è due terzi di V. Questa velocità media viene effettivamente raggiunta sul filetto che si trova sotto il pelo libero alla profondità $\xi = h/\sqrt{3}$.

Il rotore della velocità, normale al piano del moto, ha per componente secondo il terzo asse, l'asse delle z,

$$-\frac{d\mathrm{U}}{dy} = -\frac{g \operatorname{sen} i}{\nu} (h - y) .$$

Esso è proporzionale allo sforzo tangenziale Φ_{yx}, secondo la (12), e come questo sforzo si annulla in superficie.

Il lavoro compiuto dalla gravità, nell'unità di tempo e per sezione unitaria di canale, è

$$\varrho g \operatorname{sen} i \int_0^h \mathrm{U}\, dy = q\, g \operatorname{sen} i .$$

[1] H. Bazin, *Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts*, Mémoires présentés par divers Savants étrangers à l'Académie des Sciences, t. XIX, n. 1, 1865.

La funzione di dissipazione [1], relativa alla stessa porzione di canale, è

$$\mu \int_0^h \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 dy = \mu \left(\frac{g \operatorname{sen} i}{\nu}\right)^2 \frac{h^3}{3} = q\, g \operatorname{sen} i\,.$$

Si constata così, come doveva essere, che il lavoro compiuto dalla gravità va tutto speso a vincere la viscosità del liquido.

Gli sforzi principali, in un generico punto del canale, si esercitano come si è visto sugli elementi lineari inclinati di $\pm 45°$ sul fondo. Tenendo conto della espressione trovata nel n. 3 per la pressione p e per Φ_{nn} si ottiene pel moto di regime

$$\Phi_{nn} = p_0 + \varrho\, g (\cos i \pm \operatorname{sen} i)(h - y),$$

in cui p_0 è la pressione atmosferica in superficie e del doppio segno il $+$ vale per gli elementi lineari inclinati di $+45°$ sul fondo, il $-$ vale per quelli inclinati di $-45°$.

Si noti che Φ_{nn} è minimo sugli elementi inclinati di $-45°$ e che tale sforzo è sempre positivo o nullo, per qualsiasi y, qualora sia

$$p_0 \geq \varrho\, g\, h (\operatorname{sen} i - \cos i)\,.$$

Questa condizione è sempre soddisfatta, qualunque sia h, per $i \leq 45°$. Ma per $i > 45°$ si hanno dei Φ_{nn} negativi quando sia

$$h > \frac{p_0}{\varrho\, g (\operatorname{sen} i - \cos i)}\,.$$

Se si trattasse di un liquido perfetto tutti gli sforzi dovrebbero avere carattere di pressione, cioè tutti i Φ_{nn} dovrebbero essere positivi o nulli. Tale caratteristica continua a valere anche pei liquidi viscosi? Non sembra, se questi vanno considerati alla stregua dei sistemi elastici; mi pare tuttavia plausibile che, almeno pei liquidi naturali, con piccola viscosità, quale l'acqua, si possa supporre che gli sforzi normali continuino ad avere carattere di pressioni. In tale ipotesi, nel caso studiato, il moto non dovrebbe più verificarsi sotto le condizioni imposte, qualora h, per $i > 45°$, superasse il limite stabilito sopra.

Dal punto di vista fisico occorre ancora notare quanto segue. Nel caso dell'acqua, ad es., alla temperatura ordinaria, assumendo per g e ν i valori sperimentali, la (17) fornisce per la velocità media di regime un valore che è dell'ordine $28 \cdot 10^3\ \mathrm{cm}^{-1}\ \mathrm{sec}^{-1}\ h^2 \operatorname{sen} i$. In base a questa in un canale profondo anche pochi decimetri, ed inclinato appena di qualche grado, la velocità media di regime assumerebbe valori enormemente grandi di fronte a quelli osservati nei casi reali che riproducono il più da vicino le condizioni

[1] Cfr. R. Marcolongo e C. Burali-Forti, *Analyse Vectorielle*, II, p. 65.

in cui ci siamo posti. È il caso di ripetere ancor qui che in natura i moti osservati non obbediscano così semplicemente alle condizioni imposte, notevolmente restrittive. Tuttavia la (18) riproduce qualitativamente la legge parabolica stabilita empiricamente dal Bazin e dedotta dal Boulanger [1] nell'ipotesi di uno speciale movimento turbolento. E conviene ancora rilevare che la (18) rappresenta effettivamente un moto di regime e che tale moto è sempre lo stesso, qualunque sia la distribuzione iniziale della velocità.

Si poteva ammettere senz'altro *a priori* l'esistenza di un moto stazionario; le equazioni di moto avrebbero condotto parimenti alla (18). Ma sarebbe pur sempre restato il dubbio che tale moto rappresentasse un moto di regime, un moto cioè che si sarebbe raggiunto dopo un tempo indefinitamente grande a partire da opportune condizioni iniziali [2]. Tale dubbio invece non sussiste più; il moto di regime esiste ed è unico.

Geometria differenziale. — *Sulle superficie di rotazione con un sistema di traiettorie isogonali ai meridiani deformabili in linee di livello.* Nota del dott. GIOVANNI SANSONE, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

In questa Nota mi sono proposto, per le superficie di rotazione, il problema analogo a quello da me studiato per le superficie rigate [3]. Io dimostro il seguente teorema: *Se una superficie di rotazione* S *può deformarsi in guisa che le traiettorie sotto angolo* σ *costante* ($\sigma \neq \pi/2$) *dei meridiani (lossodromiche) siano linee di livello per la superficie deformata, la* S *è cilindrica, o conica, o una deformata del catenoide.*

Sia

$$ds^2 = du^2 + r^2\, d\omega^2\,, \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare di una superficie di rotazione S, essendo u l'arco di meridiano contato da un parallelo fisso, e

$$r = r(u)\,.$$

l'equazione della curva meridiana [4].

(1) A. Boulanger, *Hydraulique générale*, t. 1, p. 283.

(2) Cfr. ad es. il caso di un cilindro indefinito, che muovendosi di moto traslatorio uniforme, perpendicolarmente al suo asse in un liquido viscoso indefinito, dopo un tempo grandissimo trascina con sè come una massa rigida tutto il liquido. Vedi G. Picciati, *Sul moto di un cilindro indefinito in un liquido viscoso*, questi Rendiconti, vol. XVI, serie 5ª, 2° sem., 1907.

(3) Cfr. G. Sansone, *Sulle superficie rigate con un sistema di traiettorie isogonali deformabili in linee di livello* [Rend. R. Acc. dei Lincei, 2° sem., settembre 1923].

(4) L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* (2ª ediz. 1902), vol. I, pag. 106.