ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

in cui ci siamo posti. È il caso di ripetere ancor qui che in natura i moti osservati non obbediscano così semplicemente alle condizioni imposte, notevolmente restrittive. Tuttavia la (18) riproduce qualitativamente la legge parabolica stabilita empiricamente dal Bazin e dedotta dal Boulanger [1] nell'ipotesi di uno speciale movimento turbolento. E conviene ancora rilevare che la (18) rappresenta effettivamente un moto di regime e che tale moto è sempre lo stesso, qualunque sia la distribuzione iniziale della velocità.

Si poteva ammettere senz'altro *a priori* l'esistenza di un moto stazionario; le equazioni di moto avrebbero condotto parimenti alla (18). Ma sarebbe pur sempre restato il dubbio che tale moto rappresentasse un moto di regime, un moto cioè che si sarebbe raggiunto dopo un tempo indefinitamente grande a partire da opportune condizioni iniziali [2]. Tale dubbio invece non sussiste più; il moto di regime esiste ed è unico.

Geometria differenziale. — *Sulle superficie di rotazione con un sistema di traiettorie isogonali ai meridiani deformabili in linee di livello.* Nota del dott. GIOVANNI SANSONE, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

In questa Nota mi sono proposto, per le superficie di rotazione, il problema analogo a quello da me studiato per le superficie rigate [3]. Io dimostro il seguente teorema: *Se una superficie di rotazione* S *può deformarsi in guisa che le traiettorie sotto angolo* σ *costante* ($\sigma \neq \pi/2$) *dei meridiani (lossodromiche) siano linee di livello per la superficie deformata, la* S *è cilindrica, o conica, o una deformata del catenoide.*

Sia

$$ds^2 = du^2 + r^2\, d\omega^2\,, \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare di una superficie di rotazione S, essendo u l'arco di meridiano contato da un parallelo fisso, e

$$r = r(u)\,.$$

l'equazione della curva meridiana [4].

(1) A. Boulanger, *Hydraulique générale*, t. 1, p. 283.

(2) Cfr. ad es. il caso di un cilindro indefinito, che muovendosi di moto traslatorio uniforme, perpendicolarmente al suo asse in un liquido viscoso indefinito, dopo un tempo grandissimo trascina con sè come una massa rigida tutto il liquido. Vedi G. Picciati, *Sul moto di un cilindro indefinito in un liquido viscoso*, questi Rendiconti, vol. XVI, serie 5ª, 2º sem., 1907.

(3) Cfr. G. Sansone, *Sulle superficie rigate con un sistema di traiettorie isogonali deformabili in linee di livello* [Rend. R. Acc. dei Lincei, 2º sem., settembre 1923].

(4) L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* (2ª ediz. 1902), vol. I, pag. 106.

Facilmente si prova il teorema quando sia $\sigma = 0$, nell'ipotesi cioè che la S si possa flettere in guisa che i meridiani diventino linee di livello della superficie deformata. Infatti in questo caso la S è, per un teorema precedentemente dimostrato [1], applicabile sull'elicoide rigata d'area minima o sopra un piano. Nel primo caso si osservi che anche il catenoide è applicabile sull'elicoide rigata d'area minima [2], quindi la S è una deformata del catenoide nel secondo caso la S è un cilindro o un cono circolare.

Inversamente qualunque superficie di rotazione applicabile sul catenoide, e le superficie conico circolari, cilindro-circolari, godono della proprietà in esame. Infatti una superficie di rotazione deformata del catenoide si può flettere in guisa che i meridiani diventino le generatrici di una elicoide rigata d'area minima, e su quest'ultima superficie le traiettorie isogonali delle generatrici sono, per una proprietà generale delle superficie d'area minima [3], trasformabili per una deformazione dell'elicoide stessa in linee di livello. Per le superficie coniche e cilindriche che si possono stendere sopra un piano, risulta evidente la proprietà.

È utile ancora osservare che, escluso il caso che la S sia cilindrica, la $r(u)$ soddisfa l'equazione

$$rr'' + r'^2 = k \quad , \quad (k \neq 0\,,\ \text{costante}). \tag{2}$$

Inversamente l'integrale generale della (2) ha la forma:

$$r^2 = ku^2 + 2au + b\,,$$

con a e b costanti arbitrarie. Supposto $a^2 \neq bk$ e posto

$$c = -\frac{a}{k} \quad , \quad m = \pm\frac{1}{k}\sqrt{bk - a^2}$$

l'integrale della (2) assume la forma parametrica

$$r = \sqrt{k}\, m \cosh\frac{z}{m} \quad , \quad u = m \operatorname{senh}\frac{z}{m} + c\,,$$

e la superficie di rotazione corrispondente è una deformante del catenoide [4]; ove sia $a^2 = bk$, è

$$r = \pm\sqrt{k}\left(u + \frac{a}{k}\right)$$

e la corrispondente superficie è conica circolare.

(1) G. Sansone, loc. cit. (2), nota (2).
(2) L. Bianchi, loc. cit. (3), pag. 237.
(3) L. Bianchi, loc. cit. (3), vol. I, pag. 318.
(4) L. Bianchi, loc. cit. (3), vol. I, pag. 232.

Supposto ora $\sigma \neq 0\,, \frac{\pi}{2}$, sia

$$\varphi(u\,,v) = \text{cost.}$$

l'equazione delle traiettorie sotto angolo σ delle $v = \text{cost.}$, sarà

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen}\sigma \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \lambda r \cos\sigma \tag{3}$$ [1].

Se le $\varphi(u\,,v)$ si possono trasformare per una deformazione della S in linee di livello (linee in piani paralleli), sarà la φ una soluzione dell'equazione di Darboux:

$$\Delta_{22}\varphi = (1 - \Delta_1\varphi)\,k\,, \tag{4}$$

indicando k la curvatura totale di S, e $\Delta_1\varphi\,, \Delta_{22}\varphi$ i parametri differenziali primo e secondo di φ rispetto alla forma differenziale (1). Dalle (3) e (4), tenuto conto che è

$$\begin{Bmatrix}1\,,1\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\,,1\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\,,2\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2\,,2\\2\end{Bmatrix} = 0 \;;\; \begin{Bmatrix}1\,,2\\2\end{Bmatrix} = \frac{r'}{r} \;;\; \begin{Bmatrix}2\,,2\\1\end{Bmatrix} = -rr' \;;\; k = \frac{r''}{r}\,,$$

si hanno per il parametro λ le seguenti equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} & rr' \operatorname{sen}^2\sigma \frac{\partial\lambda^2}{\partial u} - r' \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma \frac{\partial\lambda^2}{\partial v} = 2\lambda^2 r'^2 \cos^2\sigma + 2\lambda^2 rr'' - 2rr''\,,\\ & r\cos\sigma \frac{\partial\lambda^2}{\partial u} + \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial\lambda^2}{\partial v} = -2\lambda^2 r' \cos\sigma\,, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

ed esse esprimono le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza della funzione φ.

Moltiplicando la seconda delle (5) per $r'\cos\sigma$ e sommando con la prima si ha:

$$rr' \frac{\partial\lambda^2}{\partial u} = 2\lambda^2 rr'' - 2rr''\,,$$

ovvero

$$\frac{\partial \lg(\lambda^2 - 1)}{\partial u} = \frac{\partial \lg r_1^2}{\partial u}\,,$$

[1] L. Bianchi, loc. cit. [3], vol. I, pag. 90.

da cui

$$\lambda^2 = 1 + r'^2\, \alpha(v)\,,$$

e si osservi subito che il caso $\alpha = 0$ porta per le (5) $r' = 0$ che è il caso noto delle superficie cilindriche.

Supposto allora $\alpha \neq 0$, resta da trovare come devono essere scelte le funzioni $\alpha(v)$, $r(u)$ in guisa che resti soddisfatta una delle equazioni (5), per esempio la seconda. Dovrà essere:

$$r'\left[2(rr'' + r'^2)\, \alpha(v) \cos\sigma + r'\, \alpha'(v) \operatorname{sen}\sigma + 2\cos\sigma\right] = 0\,.$$

Escluso il caso noto $r' = 0$, dovrà aversi:

$$2(rr'' + r'^2)\, \alpha(v) \cos\sigma + r'\, \alpha'(v) \operatorname{sen}\sigma + 2\cos\sigma = 0\,, \tag{6}$$

e ancora, derivando rispetto a u:

$$2(rr'' + r'^2)'\, \alpha(v) \operatorname{sen}\sigma + r''\, \alpha'(v) \operatorname{sen}\sigma \qquad = 0\,. \tag{6*}$$

La (6) e la (6*) formano per $\alpha(v)$ e $\alpha'(v)$ un sistema lineare con i coefficienti espressi per $r(u)$, $r'(u)$, $r''(u)$, $r^{(3)}(u)$, e la costante σ, sarà quindi nell'ipotesi:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} (rr'' + r'^2) & , & r' \\ (rr'' + r'^2)' & , & r'' \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

$\alpha(v) = h_1(u)$, $\alpha'(v) = h_2(u)$ e perciò $\alpha(v) = \text{cost}$, $(\alpha' = 0)$ e la (6) tenuto conto che è $\alpha \neq 0$, $\cos\sigma \neq 0$, diventa

$$rr'' + r'^2 = k \quad , \quad (k \neq 0)$$

e allora, per l'osservazione premessa, la S è cilindrica, o conica, o una deformata del catenoide.

Quando sia $\mathrm{D} = 0$, il sistema delle (6) e (6*) è possibile se la matrice

$$\begin{vmatrix} (rr'' + r'^2) & , & r' & , & 2 \\ (rr'' + r'^2)' & , & r'' & , & 0 \end{vmatrix}$$

ha la caratteristica uguale a 1, dovrà essere perciò $r'' = 0$, $r' = \text{cost}$, e la S è un cono o un cilindro circolare.