ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

dei passeri per attrarre i *pipiens* e liberarne l'uomo avrebbero creduto che il Neri non sarebbe stato tormentato: invece egli fu tormentatissimo tutte e due le volte.

Non bisogna però credere che tutti i *pipiens* biondi si comportino come quelli presi nelle località sopradette. Così alcuni biondi, ma alquanto più piccoli, presi a Fiumicino e portati in laboratorio non vollero affatto pungere e morirono.

I fatti qui riferiti dimostrano un'altra volta come la quistione riguardante i cibi preferiti dalle zanzare sia molto più complicata di quanto hanno supposto Roubaud e Legendre e che la speranza di potere usufruire gli animali domestici nella lotta contro la malaria non potrà venir realizzata (se pur lo potrà), che in seguito a nuove ed estese ricerche.

Tornando al nostro caso speciale, certi *Culex pipiens* succhiano sangue una sola volta e fanno uova una volta sola: altri succhiano sangue parecchie volte e parecchie volte fanno le uova. Che ve ne siano di quelli che non succhiano mai sangue, è molto verosimile. Che ve ne siano di quelli che preferiscono il sangue degli uccelli al nostro sangue, finora non mi risulta.

Se tra i *pipiens* che fanno le uova una sola volta e quelli che le fanno più di una volta, esistano, o no, anche differenze eidonomiche, sarà oggetto di ulteriori ricerche, dirette anche ad escludere eventuali confusioni col *C. fatigans*.

Meccanica. — *Sull'energia cinetica di masse fluide continue: viriale degli sforzi.* Nota del Corrispondente UMBERTO CISOTTI.

1. *Teorema del viriale delle quantità di moto.* — Sia m_i la massa di un punto materiale P_i appartenente a un qualsiasi sistema in movimento. Designi $\mathbf{F}_i$ la risultante delle forze *esterne* agenti su P_i e $\mathbf{f}_i$ quella delle forze *interne*, cioè delle azioni che P_i subisce da parte di tutti gli altri punti del sistema: la risultante di *tutte* le forze alle quali è sottoposto P_i è $\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i$. Se il sistema è in moto e $\mathbf{v}_i$ è la velocità di P_i, nel generico istante t, si ha

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i \,. \tag{1}$$

Sia O un punto fisso, comunque prescelto; introduciamo il vettore

$$\mathbf{r}_i = P_i - O\,, \tag{2}$$

nonchè lo scalare

$$V = \Sigma_i\, \mathbf{r}_i \times m_i\, \mathbf{v}_i\,, \tag{3}$$

(la somma va estesa a tutti i punti del sistema) che, adattando una denominazione dovuta a Clausius [1], si chiamerà *viriale delle quantità di moto*, rispetto al punto O.

Derivando la (3) rispetto al tempo, si ottiene

$$\frac{dV}{dt} = \Sigma_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i + \Sigma_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} ;$$

ma è, per la (2),

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i , \tag{4}$$

per cui la prima sommatoria del secondo membro risulta essere

$$\Sigma_i m_i \mathbf{v}_i^2 = 2T , \tag{5}$$

indicando T l'*energia cinetica* del sistema; l'altra sommatoria, per la (1), è

$$\Sigma_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = W , \tag{6}$$

con che W rappresenta il viriale, rispetto al punto O, di tutte le forze (esterne e interne) del sistema. In definitiva si ottiene la formula seguente:

$$\frac{dV}{dt} = W + 2T , \tag{7}$$

che esprime il teorema: *per qualsiasi sistema materiale in movimento, in ogni istante, la derivata rispetto al tempo del viriale delle quantità di moto rispetto a un punto fisso, è uguale al viriale corrispondente di tutte le forze aumentato del doppio dell'energia cinetica del sistema.*

Si rilevi che, per la (4), dalla (3) si ricava la seguente espressione di V:

$$V = \Sigma_i \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dI}{dt} ,$$

essendo $I = \Sigma_i m_i \mathbf{r}_i^2$ il *momento d'inerzia* del sistema rispetto al polo O; per cui la (7) può scriversi anche

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = W + 2T ,$$

formula che era già stata data dal Cerruti [2].

[1] *Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz* [Ann. der Physik, B. 141 (1870), pag. 124]. Veramente, secondo Clausius, il *viriale* di un sistema è l'analogo scalare delle forze, moltiplicato per $-\frac{1}{2}$. Lo stesso scalare è stato altrimenti denominato *momento centrifugo* (Fliehmomente) [cfr. Schweins, *Fliehmomente, oder die Summe*, ecc. Journal für die reine und angewandte Math., B. 38 (1849), pag. 77].

[2] *Sul viriale* cfr. Rend. della R. Acc. di Sc. fis. e mat. di Napoli (1876), pp. 154-165, formula (11).

Se si tratta di un sistema materiale continuo in uno spazio S, introducendo la densità μ, le espressioni (3), (5), (6) che definiscono V, 2T, W divengono rispettivamente

$$(8)\qquad V = \int_S \mu\, \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dS\ ;\ 2T = \int_S \mu\, \mathbf{v}^2\, dS\ ,\ W = \int_S \mu\, \mathbf{r} \times (\mathbf{F} + \mathbf{f})\, dS .$$

2. *Teorema di Clausius.* — Si consideri il moto durante un intervallo di tempo $(0\,,t)$: integrando entrambi i membri della (7) nel detto intervallo e introducendo i valori medî

$$W^* = \frac{1}{t}\int_0^t W\, dt \quad \text{e} \quad T^* = \frac{1}{t}\int_0^t T\, dt ,$$

di W e di T, si ottiene

$$(9)\qquad W^* + 2T^* = \frac{V(t) - V(0)}{t} .$$

Se il moto è periodico, di periodo τ, applicando la precedente all'intervallo di un periodo si ottiene

$$(10)\qquad W^* + 2T^* = 0 ,$$

essendo $V(\tau) = V(0)$. Se il fenomeno non è periodico, ma ammette un andamento assintotico (nel tempo) regolare, il secondo membro della (9) ha per limite lo zero per $t = \infty$ e continua a sussistere la (10). La (10) costituisce il teorema di Clausius ([1]).

3. *Viriale delle forze per masse fluide continue.* — Nel caso di masse continue è

$$(11)\qquad \mu\, \mathbf{f} = -\, \mathrm{grad}\, \beta ,$$

designando β l'omografia degli sforzi, e precisamente la dilatazione mediante la quale lo sforzo unitario Φ_ν, relativo a un elemento superficiale di vettore unitario normale ν, si esprime nel modo seguente:

$$(12)\qquad \Phi_\nu = \beta \nu \ \text{([2])}.$$

Supponiamo che la massa fluida si muova entro uno spazio fisso S, limitato da una o più superficie σ: per la terza delle (8) il contributo a W delle forze interne risulta essere

$$W_i = \int_S \mathbf{r} \times \mu\, \mathbf{f}\, dS = -\int_S \mathbf{r} \times \mathrm{grad}\, \beta\, dS ,$$

([1]) Loc. cit.

([2]) C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale. II: Applications à la Mécanique et à la Physique* [Pavie, Mattei, 1913, § 7, pag. 25]. Cartesianamente si ha

$$\mathrm{grad}\, \beta = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \quad , \quad \Phi_\nu = \Phi_x \cos(\nu x) + \Phi_y \cos(\nu y) + \Phi_z \cos(\nu z) .$$

ovvero [1]

$$W_i = \int_S I_1 \left(\frac{d\mathbf{r}}{dP} K\beta \right) dS + \int_\sigma (\beta \mathbf{n}) \times \mathbf{r}\, d\sigma,$$

indicando $\mathbf{n}$ il vettore unitario normale a σ, in un generico punto, rivolto verso S.

Ora β è una dilatazione per cui $K\beta = \beta$, e quindi

$$I_1 \left(\frac{d\mathbf{r}}{dP} K\beta \right) = I_1 \left(\frac{d\mathbf{r}}{dP} \beta \right) = I_1 \beta \ (^2),$$

dove $I_1 \beta$ è l'invariante lineare degli sforzi, cioè in ogni punto la somma scalare dei tre sforzi normali.

Tenendo presente la (12) si ha dunque

$$W_i = \int_S I_1 \beta\, dS + \int_\sigma \mathbf{r} \times \Phi_n\, d\sigma.$$

Se $\mathbf{F}_n$ rappresenta la forza unitaria superficiale esterna agente sugli elementi di σ, per la continuità degli sforzi attraverso σ dev'essere $\mathbf{F}_n = \Phi_n$, allora, per la precedente, l'ultima delle (8) diviene

$$W = \int_S \mu \mathbf{r} \times \mathbf{F}\, dS + \int_\sigma \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n\, d\sigma + \int_S I_1 \beta\, dS\,; \tag{13}$$

questa definisce il viriale di tutte le forze del sistema. Risulta che la somma dei due primi integrali è il viriale delle forze esterne, per cui il rimanente integrale

$$\int_S I_1 \beta\, dS,$$

ha il significato di *viriale degli sforzi interni*. Siccome esso risulta indipendente da $\mathbf{r}$ e quindi dalla posizione del punto prescelto O, così si può enunciare la seguente notevole proposizione: *il viriale degli sforzi interni di un qualsiasi sistema continuo è indipendente dal polo a cui si riferisce e, diviso per la misura del campo occupato dalla massa continua, definisce, ad ogni istante, il valor medio dell'invariante lineare degli sforzi.*

(1) C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *An. vect. gén. I: Transformations linéaires* [Pavie, Mattei, pag. 111, formula prima].

(2) In coordinate cartesiane è $I_1 \beta = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}$.