ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Meccanica. — *Sulla stabilità intrinseca dell'elicottero.* Nota del Socio Corripondente Col. G. Arturo Crocco [1].

L'equilibrio in aria calma di un elicottero *stazionario*, cioè non animato da velocità ascensionale nè traslatoria, ma tendente a rimanere immobile entro una ristretta regione di spazio, si presenta praticamente alquanto difficile e giustifica una indagine teorica sulla sua *stabilità intrinseca*, cioè indipendente dall'intervento del volatore.

Immaginiamo perciò un elicottero ridotto alla più semplice espressione: cioè costituito da una coppia di eliche coassiche giranti in senso opposto attorno ad un asse di simmetria, e traenti il loro moto da congegni racchiusi entro una sfera sottostante.

Senza nulla voler preconizzare con ciò sulla migliore forma pratica che sta per esprimersi dal genio inventivo, un tal tipo è teoricamente possibile e può perciò venire assunto come *schema ideale.*

Supponiamo altresì che la sostentazione risulti *centrata* [2], ossia passi rigorosamente per l'asse di simmetria; che questo sia esattamente baricentrico; e che vi sia equilibrio tra sostentazione e peso all'altezza, ove l'apparecchio si vuol tenere *stazionario.*

Che cosa avverrà se una qualsiasi causa perturbatrice sposterà dalla verticale l'asse di simmetria, che chiameremo z, e lo lascerà inclinato di un piccolo angolo *di rollìo*, γ?

Osserviamo che non esiste nessuna azione stabilizzante *di posizione*, ossia dipendente da γ, della natura di quella che mantiene l'equilibrio di un aerostato e tende a ripristinare la verticalità primitiva dell'asse, ma si genera soltanto una *spinta laterale* dovuta alla composizione della sostentazione, che si è obliquata di γ, col peso, mg.

Questa spinta, approssimatamente eguale a $mg \,.\, \gamma$, tende a provocare un movimento *di deriva*, dal quale soltanto può avere origine un'*azione raddrizzante indiretta*, capace di agire sul rollìo. *Deriva* e *rollìo* si comporranno allora in un moto combinato che si dirà per estensione *stabile*, se consisterà di oscillazioni più o meno decrescenti attorno ad una media posizione, e *instabile* se consisterà di oscillazioni tendenti ad amplificarsi [3].

[1] Presentata nella seduta del 1 giugno 1923.

[2] La sostentazione può essere *discentrata* per variazioni *cicliche* di incidenza o di velocità, spontanee o volontarie, che abbiano luogo durante un giro.

[3] Analoghe considerazioni abbiamo svolto studiando la *Stabilità laterale degli aeroplani* (Rendiconti Istituto Sperimentale Aeronautico: maggio-luglio 1912), ove tuttavia il moto risultante è più complesso, a causa della dissimetria nel senso della deriva.

***

Ora è agevole verificare che un tal moto combinato, se dovesse essere intrattenuto dalle sole forze motrici e raddrizzanti che abbiamo indicato, risulterebbe essenzialmente instabile.

Indichiamo infatti con u la velocità di deriva nascente dalla spinta laterale $mg \,.\, \gamma$ verso l'asse x, perpendicolare a z: con u' la sua derivata, ossia l'accelerazione baricentrica del mobile: con γ' e γ'' le derivate successive di γ, ossia la velocità angolare e l'accelerazione angolare della rotazione γ attorno all'asse y perpendicolare a z e x.

Sia j il *momento d'inerzia* dell'apparecchio attorno all'asse y.

Come più innanzi dimostreremo, in eliche di speciale forma si genera appunto nella deriva un *momento raddrizzante*, $h \,.\, u$, proporzionale *linearmente* alla velocità; cosicchè, nella ipotesi di piccoli angoli, si potranno in questo caso impostare come segue le equazioni del moto:

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{(rollìo)}: & \gamma'' + hu = 0 \\ \text{(deriva)}: & u' - g\gamma = 0 \end{cases},$$

ove i coefficienti di u e γ s'intendono rispettivamente divisi per la massa ed il momento d'inerzia del mobile.

Componendo tra loro le (1) si ottiene l'unica equazione:

$$(2) \qquad \gamma''' + hg \,.\, \gamma = 0\,;$$

soddisfatta in genere da valori di γ di forma esponenziale, con esponenti radici della cubica:

$$(3) \qquad x^3 + hg = 0\,;$$

la quale, per $h > 0$, ha appunto una radice reale negativa $-x_1$; e una coppia di radici complesse $\alpha \pm \beta i$, con *parte reale positiva* $\alpha = \frac{x_1}{2}$; e coefficiente della parte immaginaria $\beta = \alpha\sqrt{3}$.

Si genera quindi, a meno del termine esponenziale rapidamente tendente a zero, un moto *oscillatorio* di semiperiodo $\mathrm{T} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{3}}$, e di *ampiezza crescente* secondo l'incremento logaritmico $\alpha\,\mathrm{T} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

È notevole che questo incremento risulti un numero fisso, indipendente dai dati del problema e in particolare dal momento raddrizzante.

Tale moto è quindi irriducibilmente *instabile*.

* * *

Per ventura dell'elicottero, dal moto di deriva nascono momenti *ammortizzanti* e forze *resistenti*; che modificano il risultato innanzi considerato: e la cui considerazione forma oggetto essenziale della presente Nota [1].

Per ritrovarli, insieme all'azione raddrizzante già segnalata, immaginiamo le due eliche dell'elicottero *a quattro pale* ciascuna, e così regolate che ciascuna di esse fornisca metà della sostentazione ed assorba all'incirca metà della potenza. Potremo allora esaminarne una soltanto ed estenderne approssimatamente all'altra i risultati.

Sia perciò F la spinta di sostentazione di ciascuna delle pale, in aria calma e con deriva e rollìo nulli; e sia Q la resistenza incontrata da ciascuna pala nella rotazione. Se U è una velocità tangenziale *media* opportunamente scelta, potremo scrivere:

$$\text{(4)}\qquad \begin{cases} F = f(\varphi)\, U^2 \\ Q = q(\varphi)\, U^2 \end{cases};$$

ritenendo f e q funzioni sperimentali dell'angolo *medio* di incidenza, φ.

Consideriamo ora l'elicottero in movimento di deriva e di rollìo. Ne nasceranno variazioni, $\Delta\varphi$ e ΔU, nei due fattori di (4) e in conseguenza si avranno incrementi nella sostentazione e nella resistenza che, indicando cogli apici le derivate prime di f e q, potremo scrivere con sufficiente approssimazione:

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} \Delta F &= f'(\varphi)\,.\,U^2\,.\,\Delta\varphi + f(\varphi)\,2U\,.\,\Delta U \\ \Delta Q &= q'(\varphi)\,U^2\,.\,\Delta\varphi + q(\varphi)\,.\,2U\,\Delta U\,. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora gli incrementi ΔU e $\Delta\varphi$, dovuti alla deriva, per una pala il cui asse diametrale faccia l'angolo α coll'asse y.

Si avrà subito $\Delta U = u \cos\alpha$; ma quanto a $\Delta\varphi$ nulla si potrà affermare, se non si immagina l'elica *campanata*, cioè con le pale disposte obliquamente rispetto al piano perpendicolare all'asse di rotazione, a forma di stecche d'ombrello rovesciato. È la forma consueta delle eliche, quando la spinta si compensi con la forza centrifuga.

Se ω è l'angolo della campanatura, cioè l'angolo dell'asse delle pale col piano anzidetto, è agevole verificare che si ottiene per la pala innanzi definita e con molta approssimazione $U\,.\,\Delta\varphi = u \sin\alpha\,.\,\mathrm{tang}\,\omega$ [2].

È altrettanto agevole calcolare gl'incrementi dovuti al rollìo. Esso influisce sensibilmente, con la sua velocità angolare γ' innanzi definita, soltanto su φ: ma occorre conoscere la distanza ϱ del medio centro di pressione della pala dall'asse z.

(1) Il gioco delle forze ammortizzanti nella stabilità è stata da me segnalato nel 1904 studiando la velocità critica dei dirigibili; poi nel 1909, esponendo le condizioni di stabilità degli aeroplani (Questi Rendiconti, 5 giugno 1909) e poi nel 1912, l. c.

(2) L'esistenza e la calcolazione degli effetti del diedro trasversale nella deriva degli aeroplani, con analoga formula, fu da me indicato nel 1912, l. c.

Si ha in tal caso (1): $U \Delta_1 \varphi = \varrho \sin \alpha . \gamma'$.

Sostituendo tutti questi valori nelle (5) si ricavano gl'incrementi ΔF e ΔQ per la pala considerata; e con analoghe considerazioni si trovano i valori corrispondenti, nell'istante stesso, delle altre tre pale.

Fatto ciò si tratta di determinare le tre proiezioni di questi incrementi, ΔF e ΔQ, sui tre assi x, y, z; e i tre momenti degli stessi rispetti ai tre assi suddetti, conoscendo la media distanza ϱ del centro di pressione; e di sommare infine i valori istantanei, così ottenuti, di tutte e quattro le pale.

***

Si perviene, in tal modo operando, ai seguenti risultati, relativi ad *eliche campanate a quattro pale*, in movimento di deriva e rollìo.

Sono sensibilmente *nulli* in ogni istante: la proiezione risultante dei ΔF su z, e il momento risultante dei ΔQ rispetto a z.

Sono *diversi da zero*: la proiezione risultante dei ΔQ su y, ed il momento risultante dei ΔF rispetto a x; *ma si neutralizzano* con quelli dell'elica sottostante, cosicchè non hanno gioco nella stabilità.

È invece *diversa da zero*, *sommandosi* a quella dell'elica sottostante, la proiezione risultante dei ΔQ su l'asse x della deriva. Essa è una vera *forza resistente* di valore istantaneo *costante* $4\, q(\varphi)\, U . u$; cosicchè per entrambe le eliche si avrà approssimatamente:

$$(6) \qquad \textit{forza resistente} = \frac{75\,HP}{U^2} . u\,;$$

ova HP è la potenza motrice in cavalli assorbita dall'elicottero.

È poi *diverso da zero*, e *si somma* anch'esso con quello dell'elica sottostante, il momento risultante dei ΔF rispetto all'asse y, *provocato dalla deriva*; e si ha approssimatamente per entrambe le eliche, essendo D il loro diametro:

$$(7) \qquad \textit{momento raddrizzante} = \frac{mg}{8} . \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} \frac{D \tang \omega}{U} . u\,.$$

È infine anch'esso *diverso da zero*, e *si somma* con quella dell'elica sottostante il momento risultante dei ΔF rispetto allo stesso asse y, *provocato dal rollìo*: e si ha approssimatamente per entrambe le eliche:

$$(8) \qquad \textit{momento ammortizzante} = \frac{mg}{24} \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} \frac{D^2}{U} . \gamma'\,.$$

Tutti questi valori istantanei risultano sensibilmente *costanti* per l'elica a quattro pale: mentre sarebbero oscillatori durante il giro, cioè dipendenti dalla posizione α, per eliche a due o tre o cinque pale.

(1) Anche per questa formula vedi l. c.

* * *

Siamo ora in grado di impostare in modo più completo le equazioni del moto.

Avremo cioè, indicando con r, h, s i coefficienti testè determinati delle (6), (7), (8) rispettivamente divisi per m, j, j:

$$(9) \qquad \begin{cases} \text{(rollìo):} & \gamma'' + s\gamma' + hu = 0 \\ \text{(deriva):} & u' + ru - g\gamma = 0 \end{cases};$$

e, componendole,

$$\gamma''' + (r + s)\gamma'' + rs\gamma' + hg = 0\,;$$

soddisfatta da forme esponenziali con esponenti x radici della cubica:

$$(10) \qquad x^3 + (r + s)x^2 + rs\,x + hg = 0\,.$$

È qui possibile determinare le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità, cioè le condizioni perchè le radici reali e le parti reali delle radici complesse della (10) siano negative: ciò che non poteva farsi nel caso della (3).

È infatti classicamente noto (¹) che per ciò occorre e basta che i tre coefficienti r, s, h siano positivi: e che sia altresì positiva l'espressione $rs(r + s) - hg$.

Questa ultima relazione ci dà quindi la chiave del problema della stabilità, giacchè, fra le quantità assumibili come dati costruttivi, essa ci consente di variare la *campanatura* a nostro arbitrio, e di assegnarle il valore

$$(11) \qquad tg\,\omega < \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} \cdot \frac{D^3}{U^3}\frac{HP}{j}\,,$$

che ci fornirà *un elicottero intrinsecamente stabile.*

* * *

Per meglio rendersi conto del fenomeno ci porremo nel caso particolare nel quale si faccia

$$(12) \qquad (r + s).rs = hg$$

In questo caso le tre radici della (10) sono: una reale negativa $-(r + s)$; e due *immaginarie pure* con coefficiente:

$$\beta = \sqrt{\frac{hg}{r + s}}$$

cosicchè, a meno di un termine iniziale che contiene un esponenziale rapidamente annullantesi, l'ampiezza della oscillazione del rollìo risulta in defi-

(¹) Vedi l. c.

nitiva *armonica* con semiperiodo:

$$T = \sqrt{\frac{r+s}{hg}}$$

ed è facile riconoscere che, essendo il rapporto tra r ed s sostanzialmente piccolo di fronte all'unità, questo semiperiodo corrisponde approssimatamente a quello di un pendolo semplice di lunghezza:

$$\lambda = \frac{s}{h} = \frac{D}{3 \operatorname{tang} \omega},$$

che si può determinare sull'asse, tagliandolo con una perpendicolare alla campanatura tracciata a distanza $\frac{D}{3}$ dal centro.

È inoltre notevole che, calcolando l'escursione σ della deriva mediante le (9), e introducendovi la suaccennata approssimazione, si ottiene l'ampiezza massima della escursione

$$\sigma_0 = \gamma_0 \lambda$$

pari a quella del suddetto pendolo semplice, che oscilli con ampiezza angolare γ_0 eguale all'ampiezza angolare massima del rollìo.

* * *

Da questo caso particolare è agevole dedurre, tornando al caso generale, che se ci allontaniamo dalle condizioni che verificano la (12), nel senso di diminuire il momento raddrizzante come abbiamo indicato nella (11), nascerà un fattore di ammortamento, $e^{\alpha t}$, con $\alpha < 0$, che farà decrescere l'ampiezza delle oscillazioni e riporterà più o meno rapidamente l'elicottero nella primitiva posizione verticale. È il caso della *stabilità*.

Se viceversa ci allontaneremo dalla (12) nel senso di accrescere il momento raddrizzante, allora nascerà un fattore esponenziale con esponente $\alpha > 0$: e le oscillazioni risulteranno di *ampiezza crescente*.

È il caso della *instabilità*, che tende verso il limite fornito dall'esempio, nel quale abbiamo supposto $r = s = 0$, con $h > 0$.

È altrettanto agevole tuttavia considerare il limite opposto, nel quale r ed s divengano preponderanti di fronte ad h. In questo caso, facendo $h = 0$ nella prima delle (9), e supponendo che esista un *discentramento iniziale permanente* della sostentazione, si trova l'impossibilità di soddisfarla con un valor finale di γ' nullo, come viceversa ha luogo per $h > 0$. Ciò indica *instabilità*.

* * *

Concluderemo che l'elicottero ideale preso ad esempio può ritenersi *intrinsecamente stabile* purchè esistano, oltre al momento raddrizzante, forze ammortizzanti della natura descritta; e purchè il momento raddrizzante sia, di fronte ad esse, abbastanza moderato da soddisfare la determinata condizione di stabilità.