ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

file di elementi d'aspetto epiteliale (zona fertile di Champy), i quali sono destinati a spostarsi verso il coagulo.

Un ultimo argomento, che io ritengo molto probativo contro la natura fibroblastica degli elementi della zona d'invasione nelle colture di cuore: pur concedendo che l'espianto contenga del tessuto di sostegno, non può essere che scarso; mi riferisco ai dati riportati più sopra sulla struttura del cuore a questo stadio; ebbene, per spiegarci la presenza del coagulo dopo 48 ore di un numero tanto grande di cellule, bisognerebbe ammettere che gli elementi provenienti dal connettivo dell'espianto si moltiplicassero rigogliosamente; invece le mitosi nell'espianto sono rarissime, più numerose nella zona fertile, ma sempre in numero inferiore a quelle che si vedono nel coagulo.

Riassunto. — *Gli elementi che emigrano e si moltiplicano nel coagulo, nelle comuni colture di ventricolo dal 6° al 10° giorno d'incubazione sono mioblasti sdifferenziati e non fibroblasti, come finora si ritenne.*

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sul problema fondamentale della teoria dei vortici.* Nota di Orazio Lazzarino, presentata dal Socio R. Marcolongo [1].

È noto che il problema fondamentale della teoria dei vortici consiste nella ricerca della distribuzione istantanea delle velocità delle particelle di una massa fluida qualunque in moto, supposte note le distribuzioni istantanee del vortice e delle velocità di dilatazione.

Varî autori, dopo aver trattato il caso del fluido illimitato, riducono a questo il caso del fluido racchiuso da un involucro rigido mediante un artificio, che ha l'inconveniente di richiedere la conoscenza delle velocità al contorno delle particelle fluide, velocità che non rientrano nei dati del problema [2].

Lo Stekloff [3], con procedimenti piuttosto laboriosi, riuscì a trattare direttamente il secondo caso, ma nell'ipotesi particolare di fluidi perfetti ed incompressibili. Con procedimento notevolmente più semplice e nell'ipotesi generale di fluidi qualunque e comunque compressibili, tratto direttamente, in questa Nota, il secondo caso, qualunque sia il moto, purchè conosciuto, dell'involucro rigido che contiene il fluido.

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 giugno 1923.

(2) P. Appell, *Traité de Mécanique rationelle*, [T. III, a. 1909, pag. 451].

(3) W. Stekloff, *Sur la théorie des tourbillons*, [Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2e série, t. X].

Premetto la trattazione sintetica del caso del fluido illimitato compressibile, deduco poi, come caso particolare, il problema dello Stekloff e discuto infine la questione dell'unicità della soluzione anche nell'ipotesi di spazî ciclici.

1. *Caso del fluido compressibile illimitato.* — Il fluido sia illimitato in tutti i sensi e siano date le distribuzioni istantanee del vortice ω e della velocità θ di dilatazione, siano dati cioè, per ogni istante, i valori di ω e di θ in funzione dei punti P del fluido. Indicando con P′ la velocità assoluta di una particella P del fluido, le equazioni fondamentali sono:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{P}\,\mathrm{P}' = 2\omega \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{P}\,\mathrm{P}' = \theta\,. \tag{2}$$

Nell'ipotesi che le funzioni date ω e θ siano finite e continue in tutto lo spazio, la soluzione del problema consiste nel determinare un vettore P′, funzione finita e continua di $\overline{\mathrm{P}}$, che soddisfi alle equazioni fondamentali e si annulli all'infinito.

Per la ricerca di un tale vettore, osserviamo anzitutto che, per un noto teorema di Clebsch [1], si può scrivere

$$\mathrm{P}' = \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\, p + \mathrm{rot}\,\mathbf{v} \tag{3}$$

essendo p un numero reale e $\mathbf{v}$ un vettore, funzioni di P, che possono determinarsi in infiniti modi. Tutto sta a determinarli in maniera che P′ soddisfi alle condizioni del problema. Giova a tale scopo rilevare che condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) ammetta soluzioni è che in tutto lo spazio si abbia [A. V. G. I, p. 138]

$$\mathrm{div}\,\omega = 0 \tag{4}$$

che cioè *il campo di ω sia dappertutto solenoidale.* Inoltre poichè, supposto dato P′, la (3) non è sufficiente a determinare le quantità p e $\mathbf{v}$, è lecito imporre una condizione supplementare. Supponiamo che dappertutto sia

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

che cioè *anche il campo del vettore* $\mathbf{v}$ *sia solenoidale.*

Ciò premesso, sostituendo nella (1) l'espressione (3) di P′, tenendo conto della (5) e ricordando che $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,p = 0$, $\mathrm{rot}^2\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \Delta'\mathbf{v}$, qualunque siano p e $\mathbf{v}$, si ha

$$\Delta'\,\mathbf{v} = -2\omega\,. \tag{6}$$

[1] Cfr. Burali Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, [T. I, a. 1912. p. 126.] N. B. Questo testo sarà sempre indicato con la sigla A. V. G.

Questa equazione ammette notoriamente come soluzione [A. V. G., I, pag. 124]

$$\mathbf{v}=\frac{1}{2\pi}\int_\tau \frac{\omega_1}{r}\,d\tau \tag{7}$$

essendo τ il campo del vettore ω, ed ω_1 il valore di ω nel punto generico P_1 variabile nel campo τ e distante di r dal punto P nel quale si considera il vettore P'.

Operando in modo analogo sulla (2) ed osservando che $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$, si ha l'equazione (8) $\Delta p=\theta$, che ammette notoriamente la soluzione [A. V. G., I, p. 124]

$$p=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\theta_1}{r}\,d\tau \tag{9}$$

essendo l'integrale esteso a tutto il campo di θ, e θ_1 il valore di θ nel punto P_1.

Ora, tenendo conto delle ipotesi fatte su ω e θ ed applicando il metodo delle singolarità, si può dimostrare, con procedimento noto, che le funzioni $\mathbf{v}$ e p definite dalle (7) e (9) sono finite e continue in tutto lo spazio e nulle all'infinito; onde si conclude che *il vettore P' definito dalla* (3), *in cui* $\mathbf{v}$ *e* p *siano rispettivamente espresse da* (7) *e* (9), *è una soluzione del problema.*

È facile vedere che la soluzione è unica. Infatti, se P_1', P_2' fossero due soluzioni diverse relative allo stesso punto generico P di vortice ω, dalla (1) seguirebbe $\operatorname{rot}(P_1'-P_2')=0$ e quindi si avrebbe [A. V. G., I, p. 125, n. 64] una funzione numerica φ di P tale che

$$P_1'-P_2'=\operatorname{grad}\varphi\,. \tag{10}$$

D'altra parte, poichè θ non può assumere contemporaneamente due valori diversi nello stesso punto P, dalla (2) seguirebbe

$$\operatorname{div}(P_1'-P_2')=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\Delta\varphi=0\,. \tag{11}$$

Inoltre, dovendo i vettori P_1' e P_2' soddisfare a tutte le condizioni del problema, si avrebbe, sulla sfera di raggio infinito, $\operatorname{grad}\varphi=0$ e quindi anche

$$\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{n}=0 \tag{12}$$

essendo $\mathbf{n}$ un vettore unitario normale alla sfera. Ora le (11) e (12) importano che debba essere in tutto lo spazio $\varphi=\text{cost.}$ e quindi $\operatorname{grad}\varphi=0$. Si conclude perciò dalla (10) che $P_1'=P_2'$, cioè che la soluzione è unica c. d. d.

2. *Caso del fluido compressibile racchiuso da un involucro rigido in moto.* — Siano Q ed O due punti qualunque della parte rigida; Ω il vettore della velocità istantanea, di rotazione attorno ad O, di tutto il sistema; Q', O' le velocità di Q e di O all'istante generico t. Si ha, per la formola fondamentale della cinematica,

$$Q' = O' + \Omega \wedge (Q - O) \tag{13}$$

e questa relazione caratterizza lo *stato cinetico* della parte rigida. Il fluido è trascinato dall'involucro e può avere un suo moto proprio, quindi la velocità assoluta P' di una particella fluida sarà costituita da due parti, di cui una (velocità di trascinamento) è definita dalla (13) e l'altra (velocità relativa), che indichiamo con P'_r, rappresenta la velocità che avrebbe il fluido, qualora l'involucro fosse fermo. Si può quindi scrivere per una particella generica P del fluido

$$P' = P'_r + [O' + \Omega \wedge (P - O)] . \tag{14}$$

Per stabilire le condizioni al contorno, basta osservare che, secondo i risultati dell'esperienza, la velocità relativa delle particelle che trovansi a contatto delle pareti rigide è tangenziale, quindi, se $\mathbf{n}$ è un vettore unitario normale in P alla parete σ, si ha

$$P'_r \times \mathbf{n} = 0 . \tag{15}$$

Dalle (13) (14) e (15) segue che, indicando uno *stesso punto di contatto* con P, quando lo si consideri appartenente al fluido, e con Q, quando lo si consideri appartenente alla parete, si può scrivere

$$P' \times \mathbf{n} = Q' \times \mathbf{n} \tag{16}$$

cioè *i punti* P *e* Q *hanno la stessa velocità normale.*

La soluzione del problema consiste nel determinare un vettore P' che soddisfi alle (1) (2) nei punti interni ed alla (16) sul contorno della massa fluida.

Supposto espresso P' mediante la (3), si possono supporre verificate per i punti interni della massa fluida le condizioni (4) e (5) e quindi le (7) e (9) dànno, per questi punti, le espressioni di $\mathbf{v}$ e p in funzione degli elementi dati del problema. Quanto al contorno si osserva che la (16) può scriversi, tenendo conto della (3),

$$\mathrm{grad}_p\, p \times \mathbf{n} = \frac{dp}{dP}\, \mathbf{n} = (Q' - \mathrm{rot}\, \mathbf{v}) \times \mathbf{n} \tag{17}$$

e, supposto dato Q', permette di calcolare la derivata di p secondo la normale $\mathbf{n}$.

Quindi tale normale si può considerare come una quantità nota e allora, tenendo presente la (8), si può dire che » *la soluzione del problema « è sostanzialmente ridotta alla determinazione della funzione numerica* p, *« dei punti* P, *di cui si conosce il valore del parametro differenziale «* $\Delta p = \theta$ *in tutti i punti dello spazio* τ *racchiuso da* σ, *e la derivata « secondo la normale* $(dp/dP)\mathrm{n}$ *in tutti i punti del contorno* σ ».

Si può anche osservare che, integrando la (17) rispetto a σ e ricordando che l'integrale di $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \times \mathbf{n} \, . \, d\sigma$ esteso ad una superficie chiusa σ è sempre nullo [A. V. G., I, p. 113, n. 57], si ottiene

$$\int \mathrm{grad}\, p \times \mathbf{n} \, . \, d\sigma = \int Q' \times \mathbf{n} \, . \, d\sigma$$

ossia, applicando al primo membro il noto teorema della divergenza e supponendo n rivolto verso l'esterno di σ,

$$\int \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, p \, . \, d\tau = \int Q' \times \mathbf{n} \, . \, d\sigma \, .$$

Essendo $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, p = \Delta p = \theta$, si può anche scrivere

$$(18) \qquad \int \theta \, d\tau = \int Q' \times \mathbf{n} \, . \, d\sigma$$

cioè « *l'integrale della velocità di dilatazione, esteso allo spazio rac- « chiuso* τ, *è uguale al flusso totale del vettore* Q' *attraverso la su- « perficie* σ ».

Nel caso particolare del fluido incompressibile, trattato dallo Stekloff, si ha $\mathrm{div}\, P' = 0$ e le (8) e (18) dànno rispettivamente

$$\Delta p = 0 \, , \quad \int Q' \times \mathrm{n} \, . \, d\sigma = 0$$

cioè « *la funzione* p *è armonica in tutto lo spazio* τ; *il flusso totale di* Q', *uscente da* σ, *è nullo* ».

3. *Sulla unicità della soluzione.* — Se la spazio τ è semplicemente connesso, le (1) (2) (17) sono sufficienti per la determinazione del problema e la *soluzione è unica*. Infatti, se P'_1, P'_2 fossero due soluzioni diverse nello stesso punto generico P, da (1) e (2) seguirebbe

$$(19) \qquad P'_1 - P'_2 = \mathrm{grad}\, \varphi \, , \ \Delta\varphi = 0 \, .$$

Inoltre, non potendo sussistere per uno stesso punto Q due valori diversi di Q', da (16) seguirebbe

$$(20) \qquad (P'_2 - P'_1) \times \mathrm{n} = \mathrm{grad}\, \varphi \times \mathrm{n} = 0 \, .$$

Ora se si considera la circuitazione C del vettore grad φ lungo una curva chiusa s qualunque contenuta in τ e si indica con S un diaframma qualunque di contorno s, il teorema di Stokes porge, essendo sempre $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$, [A. V. G., I, p. 117, (1)]

$$C = \int_s \operatorname{grad} \varphi \times dP = \int_S \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{n} \, . \, dS = 0 \, . \tag{21}$$

Allora da (19) (20) (21) si deduce che φ è *armonica ed uniforme* in τ ed ha nulla su σ la derivata secondo la normale. Si conclude perciò che $\varphi =$ cost. in tutto lo spazio τ, onde $\operatorname{grad} \varphi = 0$, $P'_1 = P'_2$ c. d. d.

Se lo spazio τ è più volte connesso le (1) (2) (17) non sono più sufficienti per la completa determinazione del problema, occorre aggiungere la condizione che, per qualunque curva chiusa di τ, sia sempre $C = 0$, cioè che φ sia uniforme in τ. Chiamando con l'Appell «*modulo relativo alla* « *classe k delle linee chiuse di* τ » il valore costante della circuitazione di P' lungo una di queste linee, la condizione $C = 0$ si può esprimere dicendo che «*per l'identità delle soluzioni* P'_1, P'_2, .. *è necessario che queste* « *diano lo stesso valore per il modulo relativo alla classe k delle linee* « *chiuse di* τ ». Da ciò segue che, per la determinazione del problema, occorre, nel caso di spazi ciclici, conoscere anche i moduli relativi alle diverse classi di linee chiuse che si possono tracciare in detti spazî.

Matematica. — *Integrazione dell'equazione differenziale ordinaria, lineare e non lineare, ad indice qualunque.* Nota di Pio Scatizzi, S. I., presentata dal Socio V. Volterra [1].

1. L'intento principale di questa Nota è di mostrare il legame che esiste tra le equazioni differenziali ordinarie, lineari o no, ad indice qualunque e le equazioni integrali di Volterra. Tutto ciò che tende ad allargare il campo delle trascendenti conosciute, ed a stabilire nuove relazioni tra loro, conduce sempre alla scoperta degli integrali di classi di equazioni fino allora insolute. Ed appunto a tale risultato mi hanno condotto ricerche di simile genere, che mi è sembrato utile esporre, anche perchè queste due teorie hanno il merito di aver somministrato il vero strumento analitico alla fisica moderna, che spinge le sue indagini fino alla misura delle infinite azioni elementari dei fenomeni fisici.

L'equazione lineare

$$D^m y + \varphi_1(x) \, y = \varphi_2(x) \tag{1}$$

[1] Presentata nella seduta del 20 maggio 1923.