ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Ora se si considera la circuitazione C del vettore grad φ lungo una curva chiusa s qualunque contenuta in τ e si indica con S un diaframma qualunque di contorno s, il teorema di Stokes porge, essendo sempre $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$, [A. V. G., I, p. 117, (1)]

$$\text{(21)} \qquad C = \int_s \mathrm{grad}\,\varphi \times dP = \int_S \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi \times \mathbf{n}\,.\,dS = 0\,.$$

Allora da (19) (20) (21) si deduce che φ è *armonica ed uniforme* in τ ed ha nulla su σ la derivata secondo la normale. Si conclude perciò che $\varphi =$ cost. in tutto lo spazio τ, onde $\mathrm{grad}\,\varphi = 0$, $P'_1 = P'_2$ c. d. d.

Se lo spazio τ è più volte connesso le (1) (2) (17) non sono più sufficienti per la completa determinazione del problema, occorre aggiungere la condizione che, per qualunque curva chiusa di τ, sia sempre $C = 0$, cioè che φ sia uniforme in τ. Chiamando con l'Appell « *modulo relativo alla* « *classe k delle linee chiuse di* τ » il valore costante della circuitazione di P′ lungo una di queste linee, la condizione $C = 0$ si può esprimere dicendo che « *per l'identità delle soluzioni* P'_1, P'_2, .. *è necessario che queste* « *diano lo stesso valore per il modulo relativo alla classe k delle linee* « *chiuse di* τ ». Da ciò segue che, per la determinazione del problema, occorre, nel caso di spazi ciclici, conoscere anche i moduli relativi alle diverse classi di linee chiuse che si possono tracciare in detti spazî.

Matematica. — *Integrazione dell'equazione differenziale ordinaria, lineare e non lineare, ad indice qualunque.* Nota di Pio Scatizzi, S. I., presentata dal Socio V. Volterra [1].

1. L'intento principale di questa Nota è di mostrare il legame che esiste tra le equazioni differenziali ordinarie, lineari o no, ad indice qualunque e le equazioni integrali di Volterra. Tutto ciò che tende ad allargare il campo delle trascendenti conosciute, ed a stabilire nuove relazioni tra loro, conduce sempre alla scoperta degli integrali di classi di equazioni fino allora insolute. Ed appunto a tale risultato mi hanno condotto ricerche di simile genere, che mi è sembrato utile esporre, anche perchè queste due teorie hanno il merito di aver somministrato il vero strumento analitico alla fisica moderna, che spinge le sue indagini fino alla misura delle infinite azioni elementari dei fenomeni fisici.

L'equazione lineare

$$\text{(1)} \qquad D^m y + \varphi_1(x)\, y = \varphi_2(x)$$

[1] Presentata nella seduta del 20 maggio 1923.

in cui m è un numero qualunque positivo o negativo, φ_1 e φ_2 funzioni arbitrarie della sola x, sebbene sia un caso particolare dell'altra non lineare

$$\mathrm{D}^m y + \varphi_1(x)\, y^n = \varphi_2(x)\,, \tag{2}$$

dove n è un intero qualsivoglia, sarà risolta separatamente da questa per ragione del metodo d'integrazione diverso, che ho creduto più opportuno seguire.

2. Giova intanto prima di tutto richiamare un teorema di Liouville ([1]), espresso dalla seguente eguaglianza.

$$\int_0^1 \varphi\left(\frac{\theta}{x}\right)(1-\theta)^p\, d\theta = (-1)^{p+1}\, x\, \Gamma(p+1) \int^{p+1} \frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{p+2}}\, dx^{p+1}\,. \tag{3}$$

In cui $\varphi(x)$ è una funzione sviluppabile secondo le potenze della sua variabile, ossia

$$\varphi(x) = \sum \mathrm{A}_r\, x^r\,,$$

p un numero qualunque; il segno $\int^{p+1}$ significa l'operazione d'integrazione applicata $p+1$ volte, e può anche indicarsi col simbolo ad indice negativo D^{-p-1}; $\Gamma(p+1)$ il solito integrale Euleriano.

3. Rispetto alla (1) possiamo fare due ipotesi, a seconda che sia

$$m \gtreqless 0\,.$$

Nel primo caso, mediante la trasformazione

$$y = \mathrm{D}^{-m}\, u(x)$$

la (1) si cambia in quest'altra:

$$\varphi_2(x) = u(x) + \varphi_1(x)\, \mathrm{D}^{-m}\, u(x) \tag{α}$$

nel secondo caso converrà scriverla così:

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = y(x) + \frac{1}{\varphi_1(x)}\, \mathrm{D}^{-m} y(x)\,. \tag{β}$$

Per tal modo essendo ambedue gl'indici negativi ci sarà agevole applicare la (3), che si può porre senz'altro sotto questa forma:

$$\mathrm{D}^{-p-1}\, \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^{p+2}} = \frac{1}{(-1)^{p+1}\, x\, \Gamma(p+1)} \int_0^1 \varphi\left(\frac{\theta}{x}\right)(1-\theta)^p\, d\theta\,. \tag{4}$$

([1]) S. Liouville, *Questions de géométrie et de mécanique*, Journal de l'École Polytecnique, XX, cahier IX, pag. 47.

Intanto operiamo sulla (α) la seguente trasformazione

$$u(x) = v\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^{p+2}}$$

e diverrà allora

$$\varphi_2(x) = v\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^{p+2}} + \varphi_1(x)\, \mathrm{D}^{-m} v\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^{p+2}} ;$$

ponendo quindi $m = p + 1$, ed applicando la (4), avremo:

$$\varphi_2(x) = v\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^{m+1}} + \varphi_1(x) \frac{1}{(-1)^m\, x\, \Gamma(m)} \int_0^1 v\left(\frac{\theta}{x}\right) (1-\theta)^{m-1}\, d\theta ;$$

cambiamo ancora x in $\frac{1}{x}$ (il che è lecito) l'equazione diverrà:

$$\varphi_2\left(\frac{1}{x}\right) = v(x)\, x^{m+1} + \frac{\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right) x}{(-1)^m\, \Gamma(m)} \int_0^1 v(\theta x)\,(1-\theta)^{m-1}\, d\theta .$$

Ponendo, infine, $\theta x = z$ e

$$\Phi(x) = \frac{\varphi_2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{m+1}}$$

giungeremo finalmente alla nota forma dell'equazione di Volterra

$$\Phi(x) = v(x) + \int_0^x \frac{\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right)(x-z)^{m-1}}{(-1)^m\, \Gamma(m)\, x^{2m-1}}\, v(z)\, dz . \tag{5}$$

La $\varphi_1(x)$, dunque, deve esser tale che risulti:

$$\left| \frac{\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right)(x-z)^{m-1}}{x^{2m-1}} \right| < \mathrm{M}$$

dentro il triangolo

$0 \leq z \leq x \leq b$ essendo M e b costanti,

ed allora detto con $\psi(x, x-z)$ il nucleo risolvente corrispondente, otterremo l'inversione

$$v(x) = \Phi(x) + \int_0^x \psi(x, x-z)\, \Phi(z)\, dz .$$

e in definitiva l'integrale dell'equazione proposta:

$$(6) \qquad y(x) = \frac{1}{(-1)^m \Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{\alpha^{m-1}}{(x+\alpha)^{m+1}}\, v\left[\frac{1}{x+\alpha}\right] d\alpha$$

indicando con α un parametro d'integrazione, e con v la soluzione trovata ([1]).

Si potrebbe qui far la questione se alla soluzione (6) si debba o no aggiungere la « *fonction complementaire* » di Liouville ([2]), che dà con un

([1]) A realizzare la trasformazione $y = \mathrm{D}^{-m}\, v\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^{m+1}}$ abbiamo usato la formola di Liouville:

$$\mathrm{D}^{-m}\, \varphi(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x+\alpha)}{(-1)^m \Gamma(m)}\, \alpha^{m-1}\, d\alpha$$

anzichè quella della Molinari

$$\mathrm{D}^{-m}\, \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

come abbiamo fatto nelle Note precedenti, perchè questa non risulta da una dimostrazione che essa ne dia, riguardo al limite inferiore $-\infty$, unico capo per cui si differenzia dalla formola di Letnikof

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(z)\, dz}{(x-z)^{n+1}}$$

a meno che non si possa legittimare, dimostrando che la formola della Molinari può ridursi a quella di Liouville mediante la trasformazione

$$x - \xi = -\alpha \quad \text{ossia} \quad \xi = x + \alpha$$

onde

$$(x-\xi)^{m-1} = (-1)^{m-1}\alpha^{m-1} \ , \ -d\xi = -\, d\alpha$$

quanto ai limiti

per ξ che tende a $-\infty$, α tende a $-\infty$
per ξ » « x, α » » 0

ma

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(x+\alpha)\, \alpha^{m-1}\, d\alpha = \int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\, \alpha^{m-1}\, d\alpha$$

onde la formola di Liouville.

Alla condizione di convergenza della Molinari che φ si annulli convenientemente per $\xi = -\infty$ corrisponde implicitamente quella di Liouville per $\alpha = +\infty$, inquantochè egli è partito dal supposto che la $\varphi(x)$ sia sviluppabile in serie di potenze esponenziali negative, e quindi annullantesi precisamente per $\alpha = +\infty$, risultando questo parametro sempre moltiplicato per il coefficiente negativo della x. Infatti

$$\int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\, \alpha^{m-1}\, d\alpha = \int_0^\infty \sum \mathrm{A}_r\, e^{-n_r(x+\alpha)}\, \alpha^{m-1}\, d\alpha = \sum \mathrm{A}_r\, e^{-n_r x} \int_0^\infty e^{-n_r \alpha}\, \alpha^{m-1}\, d\alpha\,.$$

([2]) Liouville, *Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires*, Journal de Crélle (1834) B XI, p. 1-19.

certo, indeterminato ma finito, numero di costanti arbitrarie l'espressione più generale di una derivata m.esima qualunque; tale funzione è della forma

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots C_v x^v .$$

Dico che nel nostro caso è evidente che non si debba aggiungere, dato che la soluzione della (1) si presenta sotto la forma (6), ossia sotto una forma che richiede come condizione di convergenza l'annullarsi della funzione per $x = \infty$, cosa che non accadrebbe, come è chiaro, anche della funzione complementare. Per conseguenza la (6) ha tutta l'estensione che gli conviene.

4. Nel caso (β) il procedimento è del tutto analogo, e per la soluzione basterà cioè invertire l'equazione

$$(7) \qquad \frac{\varphi_2\left(\frac{1}{x}\right)}{\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right) x^{m+1}} = v(x) + \int_0^x \frac{\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right)(x-z)^{m-1}}{(-1)^m \Gamma(m)\, x^m} v(z) dz .$$

Ottica atmosferica. — *Osservazioni dei punti neutri della polarizzazione atmosferica eseguite a Napoli nel 1922.* Nota del dott. S. Aurino, presentata dal Corrisp. A. Bemporad [1].

Le ricerche sulla polarizzazione atmosferica hanno avuto in Italia cultori rari e lontani. Dopo quelle antiche dello Zantedeschi a Bologna (1846) e quelle un po' piu recenti di Rubenson a Roma e a Segni (1861-62) esse parvero completamente dimenticate qui da noi e forse lo sarebbero ancor oggi se non fossero state riprese attivamente dal prof. Giovanni Platania. Il quale, in un recente lavoro [2], ha dato conto dei risultati delle osservazioni di polarizzazione atmosferica eseguite a Catania negli anni 1910-1918.

Dette osservazioni, fatte nelle ore intorno al tramonto, consistono nella misura indiretta delle distanze angolari dei punti neutri di Babinet e di Arago dal sole e dall'antisole rispettivamente. Lo studio s'incardina tutto sulla variazione di queste distanze, i di cui valori medî, sui quali opera l'A., si riferiscono a giorni perfettamente sereni.

L'interesse che presenta la ricerca dei p. n. si rende manifesto scorrendo le pagine del citato lavoro, ed uno dei risultati fra i più cospicui è di certo quello che la ricerca stessa appare come « il miglior criterio per lo

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1923.

(2) Memorie della R. Accademia dei Lincei, Cl. di scienze fisiche, vol. XIV, serie V. Premio Carpi per l'anno 1919-20.