ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul potenziale di un disco con distribuzione simmetrica.* Nota di FRANCESCO SBRANA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Il prof. Serini è pervenuto, con due diversi procedimenti, ad un risultato del Beltrami, relativo al potenziale di un disco con distribuzione simmetrica, col proposito di valersene per lo studio di alcune questioni di Elettrostatica [1]. Con ciò che segue crediamo di portare una ulteriore semplificazione nel modo di stabilire quel risultato, lusingandoci che essa valga ad agevolare la risoluzione delle equazioni alle quali il prof. Serini è pervenuto.

2. Il problema di cui si tratta si può ridurre all'equazione integrale

$$(1) \qquad \int_0^a t\,\chi(t)\,\mathrm{H}(r,t)\,dt = \mathrm{V}(r)\,, \quad (r < a)\,,$$

dove

$$(2) \qquad \mathrm{H}(r,t) = \int_0^\infty \mathrm{J}_0(rs)\,\mathrm{J}_0(st)\,ds \ \ (^2)\,.$$

Di quest'ultima funzione è facile ottenere un'espressione più conveniente. Intanto, poichè

$$\mathrm{J}_0(st) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\cos us}{\sqrt{t^2-u^2}}\,du \ \ (^3),$$

risulta

$$\mathrm{H}(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{du}{\sqrt{t^2-u^2}}\int_0^\infty \mathrm{J}_0(rs)\cos us\,ds\,;$$

(1) Serini, *Potenziale di un disco con distribuzione simmetrica,* Rend. Lincei, 1923, 1° sem., fasc. 7°.

(2) Serini, loc. cit. (8). Con $\mathrm{J}_0(z)$ si indica la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero.

(3) Basta porre $x = st$, $t \operatorname{sen}\omega = u$, nella nota formula

$$\mathrm{J}_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{sen}\omega)\,d\omega\,.$$

e quindi, dalle uguaglianze

$$\int_0^\infty J_0(rs)\cos us\, ds = \frac{1}{\sqrt{r^2-u^2}}, \quad \text{per } u < r,$$

$$\int_0^\infty J_0(rs)\cos us\, ds = 0, \quad \text{per } u > r \text{ (1)},$$

segue

$$\text{(3)} \qquad H(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{du}{\sqrt{t^2-u^2}\sqrt{r^2-u^2}}, \quad \text{per } t < r,$$

$$\text{(4)} \qquad H(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{du}{\sqrt{t^2-u^2}\sqrt{r^2-u^2}}, \quad \text{per } t > r.$$

Sostituendo nella (1), si trova

$$\int_0^r t\,\chi(t)\,dt \int_0^t \frac{du}{\sqrt{t^2-u^2}\sqrt{r^2-u^2}} +$$

$$+ \int_r^a t\,\chi(t)\,dt \int_0^r \frac{du}{\sqrt{t^2-u^2}\sqrt{r^2-u^2}} = \frac{\pi}{2}\,V(r).$$

Se ora si applica al primo integrale la formula di inversione di Dirichlet, e nel secondo si eseguisce semplicemente uno scambio di integrazioni, si ottiene

$$\int_0^r \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \int_u^r \frac{t\,\chi(t)}{\sqrt{t^2-u^2}}\,dt + \int_0^r \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \int_r^a \frac{t\,\chi(t)}{\sqrt{t^2-u^2}}\,dt = \frac{\pi}{2}\,V(r),$$

ovvero

$$\text{(5)} \qquad \int_0^r \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \int_u^a \frac{t\,\chi(t)}{\sqrt{t^2-u^2}}\,dt = \frac{\pi}{2}\,V(r).$$

Si ha così una equazione di Abel, per la funzione incognita

$$\text{(6)} \qquad f(u) = \int_u^a \frac{t\,\chi(t)}{\sqrt{t^2-u^2}}\,dt;$$

essa è risoluta dalla formula

$$f(r) = \frac{d}{dr}\int_0^r \frac{t\,V(t)}{\sqrt{r^2-t^2}}\,dt \text{ (2)}.$$

Dalla (6) segue poi

$$\chi(r) = -\frac{2}{\pi r}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{u\,f(u)}{\sqrt{u^2-r^2}}\,du.$$

(1) Cfr., p. es., loc. cit., (6).
(2) Cfr. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales*, etc. (Paris, 1913), pp. 34-39.