ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Matematica. — *Il secondo problema fondamentale della statica elastica.* Nota di A. Korn, presentata dal Socio Levi-Civita [1].

Si tratta di assegnare tre funzioni u, v, w, uniformi e continue assieme alle loro derivate prime in un campo τ dello spazio ordinario, le quali verificano, entro τ, le tre equazioni indefinite

$$(1) \qquad \Delta u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \,, \ldots \quad (^2) \,,$$

e al contorno ω di τ le condizioni ai limiti

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1-k}{2}\, \theta \cos(\nu x) - \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{w} \cos(\nu y) - \mathfrak{v} \cos(\nu z) \right\} + f_1 \,, \ldots$$

ν designando la normale alla superficie ω, volta all'interno. f_1, f_2, f_3 stanno a rappresentare tre funzioni dei punti di ω, le quali verificano le equazioni (cardinali dell'equilibrio)

$$(3) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\omega f_1 \, d\omega = 0 \,, \ldots \\ \displaystyle\int_\omega (y f_3 - z f_2) \, d\omega = 0 \,, \ldots \,, \end{cases}$$

e sono continue in tal guisa da ottemperare, per una coppia qualsiasi di punti (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) di ω alle disuguaglianze

$$(4) \qquad |f_1(x_2, y_2, z_2) - f_1(x_1, y_1, z_1)| \leqq b\, r_{12}^{\varpi} \,, \ldots \,,$$

dove b sta ad indicare una costante positiva (finita), r_{12} la distanza dei due punti e ϖ un numero > 0. Ricordiamo che k è una costante $> 1/3$ dipendente dalle costanti di isotropia elastica del corpo di cui si tratta.

Supporremo per semplicità che il campo τ sia semplicemente connesso (nel caso contrario si presenterebbe qualche maggiore complicazione); inoltre ammetteremo nei riguardi della superficie ω che essa si trovi tutta al finito e che $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ siano funzioni dei punti del contorno uniformi e finite assieme alle loro derivate prime.

(1) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1924.

(2) Si designa, come di solito, con θ la dilatazione cubica $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$. Indicheremo inoltre con $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ le componenti del rotore $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$, ...

La prima soluzione generale di questo problema fu da me conseguita [1] nel modo seguente: risolvendo prima, con un metodo di approssimazioni successive quello che chiamai *problema preliminare*, corrispondente a $k=1$, cioè alle equazioni

$$(5)\qquad \varDelta u + \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0\,, \ldots \quad \text{in } \tau\,;$$

$$(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{2}\Big(\mathfrak{w}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}\cos(\nu z)\Big) + f_1\,, \ldots \quad \text{su } \omega\,;$$

e passando poi, con un secondo metodo di approssimazioni successive, al caso di un k qualunque, purchè soddisfacente alla disuguaglianza

$$\frac{1}{3} < k < \infty\,.$$

Mi propongo ora di mostrare che il metodo da me seguito per la risoluzione del problema preliminare può essere applicato al caso di un qualsiasi $k > 1/3$, sicchè diviene superfluo l'impiego di un secondo procedimento di approssimazioni successive.

Si arriva così ad una nuova soluzione generale del secondo problema fondamentale e a nuovi sviluppi in serie di funzioni caratteristiche (autofunzioni).

Si costruiscono successivamente infinite terne di funzioni armoniche del campo τ, che io soglio chiamare *potenziali* per includere anche il comportamento qualitativo. Precisamente le terne definite dai valori seguenti della derivata normale al contorno ω, colla specificazione di possedere, nel campo τ, valor medio nullo:

$$(7)\qquad \frac{\partial u'_0}{\partial \nu} = f_1\,, \ldots\,,$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u'_j}{\partial \nu} = &-\frac{k+2}{k}\frac{\partial u'_{j-1}}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \frac{\theta'_{j-1}}{r}\,d\tau \\ &+ \frac{1-k}{k}\,\theta'_{j-1}\cos(\nu x) - \frac{1+k}{k}\Big\{\mathfrak{W}'_{j-1}\cos(\nu y) - \mathfrak{V}'_{j-1}\cos(\nu z)\Big\} \\ &+ \frac{2}{k}\frac{\partial \mathrm{U}'_{j-1}}{\partial \nu} + \frac{1}{k}\Big\{\mathfrak{W}'_{j-1}\cos(\nu y) - \mathfrak{V}'_{j-1}\cos(\nu z)\Big\}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(j = 1\,, 2\,, \ldots)\,. \end{aligned}\right.$$

Le funzioni U_j, V_j, W_j che compariscono in queste equazioni sono a lor volta definite dalle posizioni

$$(9)\qquad \mathrm{U}'_j = \frac{1}{4\pi}\int_\omega \left(\frac{\partial \varphi'_j}{\partial z}\cos(\nu y) - \frac{\partial \varphi'_j}{\partial y}\cos(\nu z)\right)\frac{d\omega}{r}\,, \ldots \qquad (j = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)$$

[1] *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface*, Annales de Toulouse, 1908.

in cui φ'_j è quella funzione potenziale del campo τ che rimane definita, a meno di una costante additiva [1], dalla condizione al contorno

$$(10) \qquad \frac{1}{4\pi}\int_\omega \varphi'_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \mathfrak{u}'_j \cos(\nu x) + \mathfrak{v}'_j \cos(\nu y) + \mathfrak{w}'_j \cos(\nu z)$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots);$$

inoltre, in conformità all'avvertenza già fatta a proposito di $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, si designano con $\mathfrak{U}_j, \mathfrak{V}_j, \mathfrak{W}_j$ i binomi $\frac{\partial W_j}{\partial y} - \frac{\partial V_j}{\partial z}$, ecc.

Se noi potremo provare che le serie

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u' = u'_0 + u'_1 + u'_2 + \cdots, \ldots \\ U' = U'_0 + U'_1 + U'_2 + \cdots, \ldots \end{array} \right.$$

convergono uniformemente in τ, assieme alle loro derivate prime, e vi rappresentano funzioni potenziali, esse costituiranno senz'altro soluzioni delle equazioni

$$\frac{\partial u'}{\partial \nu} = -\frac{k+2}{k}\frac{\partial u'}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}$$
$$+ \frac{1-k}{k}\theta' \cos(\nu x) - \frac{1+k}{k}\left\{ \mathfrak{w}' \cos(\nu y) - \mathfrak{v}' \cos(\nu z)\right\}$$
$$+ \frac{2}{k}\frac{\partial U'}{\partial \nu} + \frac{1}{k}\left\{ \mathfrak{W}' \cos(\nu y) - \mathfrak{V}' \cos(\nu z)\right\} + f_1, \ldots$$

relative al contorno, ossia, ciò che è lo stesso, soluzioni del problema

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'}{\partial \nu} = -\frac{1}{4\pi}\frac{k}{k+1}\frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} \\ \quad + \frac{1}{2}\frac{1-k}{1+k}\theta' \cos(\nu x) - \frac{1}{2}\left\{ \mathfrak{w}' \cos(\nu y) - \mathfrak{v}' \cos(\nu z)\right\} \\ \quad + \frac{1}{1+k}\frac{\partial U'}{\partial \nu} + \frac{1}{2(1+k)}\left\{ \mathfrak{W}' \cos(\nu y) - \mathfrak{V}' \cos(\nu z)\right\} + \frac{k}{2(1+k)} f_1, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

le equazioni riferendosi sempre al contorno ω [2].

[1] Si noti che una tale costante additiva non interviene nelle equazioni (9). Le modificazioni introdotte rispetto alla mia precedente trattazione del problema preliminare ($k = 1$) sono richieste dalla presenza del parametro positivo k, che può avere qualsiasi valore $> 1/3$.

[2] Si tratta di soluzione univocamente determinata se si aggiunge la condizione che si annullino i valori medî di u', v', w' relativi al campo τ:

$$(12') \qquad \int_\tau u' \, d\tau = 0, \ldots$$

Se ora si pone

$$u = \frac{2(1+k)}{k} u' - \frac{2}{k} U' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \dots, \tag{13}$$

con che

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{2}{k} \theta', \\ \mathfrak{u} = \dfrac{2(1+k)}{k} \mathfrak{u}' - \dfrac{2}{k} \mathrm{U}', \dots, \end{cases} \tag{14}$$

risulta

$$\Delta u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \dots \quad \text{in } \tau; \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1-k}{2} \theta \cos(\nu x) - \frac{1}{2}\Big(\mathfrak{w} \cos(\nu y) - \mathfrak{v} \cos(\nu z)\Big) + f_1, \dots, \quad \text{sopra } \omega, \tag{16}$$

talchè le funzioni definite dalle (13) costituiscono precisamente le soluzioni del problema proposto.

Riservo ad una Memoria che comparirà negli *Annali di Matematica* la dimostrazione della convergenza e lo sviluppo dei calcoli, nonchè l'applicazione ad un campo di forma sferica. Quest'ultima conduce, come si vedrà, a introdurre nel modo più spontaneo terne di funzioni, le quali costituiscono, sotto il duplice aspetto teorico e pratico, l'analogo delle funzioni steriche per i problemi di statica elastica.

Fisica. — *Sulle basi fisiche della Relatività.* Nota del dott. N. Spampinato, presentata dal Socio Somigliana [1].

Nell'adunanza del 7 aprile del Congresso della Società per il progresso delle scienze, tenutosi a Catania nel presente anno 1923, ho osservato che assegnati nello spazio due sistemi di coordinate ortogonali k e k', in moto traslatorio l'uno rispetto all'altro, non esiste in Relatività un metodo *diretto* per costruire la trasformazione (di Lorentz) tra k e k' che spieghi l'impossibilità di mettere in evidenza il moto assoluto della terra; un tale metodo esiste invece, nei trattati di Relatività, nel caso particolare che conduce alla trasformazione speciale di Lorentz.

Nel caso generale esiste un metodo per costruire quella trasformazione, fondato sulla seconda definizione del gruppo di Lorentz data dal Poincaré [2], però con tale metodo, per costruire la trasformazione cercata, *si è sempre costretti a passare attraverso la trasformazione speciale di Lorentz.* Si ha da fare quindi la seguente domanda: *Qual'è l'intima ragione per la*

[1] Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924.
[2] Cfr. *Esercitazioni matematiche,* Circolo Matematico di Catania, anno III, pag. 161.