ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Se ora si pone

$$(13) \qquad u = \frac{2(1+k)}{k} u' - \frac{2}{k} U' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \ldots,$$

con che

$$(14) \qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{2}{k} \theta', \\ \mathfrak{v} = \dfrac{2(1+k)}{k} \mathfrak{u}' - \dfrac{2}{k} \mathfrak{U}', \ldots, \end{cases}$$

risulta

$$(15) \qquad \Delta u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \ldots \quad \text{in } \tau;$$

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1-k}{2} \theta \cos(\nu x) - \frac{1}{2}\left(\mathfrak{w} \cos(\nu y) - \mathfrak{v} \cos(\nu z)\right) + f_1, \ldots, \quad \text{sopra } \omega,$$

talchè le funzioni definite dalle (13) costituiscono precisamente le soluzioni del problema proposto.

Riservo ad una Memoria che comparirà negli *Annali di Matematica* la dimostrazione della convergenza e lo sviluppo dei calcoli, nonchè l'applicazione ad un campo di forma sferica. Quest'ultima conduce, come si vedrà, a introdurre nel modo più spontaneo terne di funzioni, le quali costituiscono, sotto il duplice aspetto teorico e pratico, l'analogo delle funzioni steriche per i problemi di statica elastica.

Fisica. — *Sulle basi fisiche della Relatività*. Nota del dott. N. Spampinato, presentata dal Socio Somigliana [1].

Nell'adunanza del 7 aprile del Congresso della Società per il progresso delle scienze, tenutosi a Catania nel presente anno 1923, ho osservato che assegnati nello spazio due sistemi di coordinate ortogonali k e k', in moto traslatorio l'uno rispetto all'altro, non esiste in Relatività un metodo *diretto* per costruire la trasformazione (di Lorentz) tra k e k' che spieghi l'impossibilità di mettere in evidenza il moto assoluto della terra; un tale metodo esiste invece, nei trattati di Relatività, nel caso particolare che conduce alla trasformazione speciale di Lorentz.

Nel caso generale esiste un metodo per costruire quella trasformazione, fondato sulla seconda definizione del gruppo di Lorentz data dal Poincaré [2], però con tale metodo, per costruire la trasformazione cercata, *si è sempre costretti a passare attraverso la trasformazione speciale di Lorentz*. Si ha da fare quindi la seguente domanda: *Qual'è l'intima ragione per la*

[1] Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924.
[2] Cfr. *Esercitazioni matematiche*, Circolo Matematico di Catania, anno III, pag. 161.

quale la trasformazione cercata si debba poter trovare soltanto usufruendo della trasformazione speciale di Lorentz ?

In questa mia Nota per mettere ancora in evidenza la fondatezza della precedente questione pregiudiziale, voglio fare due osservazioni, la prima che potrebbe anche infirmare l'accettabilità di quel metodo che, nell'usufruire della trasformazione speciale di Lorentz, sembra tener conto d'un isomorfismo oloedrico inesistente tra il gruppo di Galileo e quello di Lorentz, la seconda mette in evidenza una certa arbitrarietà nella costruzione complessiva del gruppo di Lorentz.

1. Siano $k(xyz)$ e $k'(x'y'z')$ due sistemi di assi ortogonali in moto traslatorio l'uno rispetto all'altro con velocità costante v, coincidenti al tempo $t=0$ e con la direzione del moto coincidente col verso positivo dell'asse delle x.

La trasformazione tra k e k' in meccanica classica è data da:

$$\mathrm{G}(v) \qquad x' = x - vt \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = t \; ;$$

in meccanica relativistica ([1]) è data invece da

$$\mathrm{L}(v) \qquad x' = \frac{1}{\mathrm{R}}(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{1}{\mathrm{R}}\left(t + \frac{v}{c^2}x\right)$$

dove con t e t' si indicano i tempi che competono ai sistemi k e k', con c la velocità della luce supposta costante e dove s'è posto: $\mathrm{R} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Facendo variare v nella trasformazione $\mathrm{G}(v)$ si ottengono ∞^1 trasformazioni formanti un gruppo (*Gruppo speciale di Galileo*), che indicheremo con (G). Analogamente al variare di v in $\mathrm{L}(v)$ si ottengono ∞^1 trasformazioni formanti un gruppo (*Gruppo speciale di Lorentz*) che indicheremo con (L).

In Relatività ad ogni trasformazione di Galileo $\mathrm{G}(v_1)$ si sostituisce la trasformazione di Lorentz $\mathrm{L}(v_1)$ che diremo corrispondente di $\mathrm{G}(v_1)$ in una corrispondenza biunivoca ω. Ora ω non è un isomorfismo oloedrico tra i gruppi (G) e (L), infatti si prova facilmente che è

$$\mathrm{G}(v_1) \cdot \mathrm{G}(v_2) = \mathrm{G}(v_1 + v_2) \,, \tag{1}$$

mentre è

$$\mathrm{L}(v_1) \cdot \mathrm{L}(v_2) \neq \mathrm{L}(v_1 + v_2) \,,$$

Invece è

$$\mathrm{L}(v_1) \cdot \mathrm{L}(v_2) = \mathrm{L}\left(\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}\right) \text{([2])} \,. \tag{2}$$

([1]) Vedi, per es., R. Marcolongo, *Relatività* (Principato, Messina), pag. 69.

([2]) Le (1) e (2) esprimono il teorema della composizione di due velocità, di direzioni comuni, nella meccanica classica e nella meccanica relativistica.

Ciò posto consideriamo il caso che (ammesso che al tempo $t = 0$ l'origine O di k coincida con l'origine O' di k') gli assi di k abbiano una posizione qualunque rispetto a quelli di k' e la direzione del moto sia pure qualunque.

Dati i coseni direttori a_{ij} degli assi di un sistema rispetto a quelli dell'altro e i coseni direttori p_1, p_2, p_3 della direzione del moto rispetto ad uno dei due sistemi, resta determinata la trasformazione di Galileo, diciamo G, che lega i due sistemi in moto traslatorio con velocità costante v. Al variare della matrice ortogonale $\| a_{ij} \|$, dei coseni direttori p_1, p_2, p_3 (con $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$), e della velocità v del moto traslatorio, la trasformazione G varierà descrivendo un gruppo [G] con ∞^6 elementi, (*Gruppo delle trasformazioni di Galileo*).

Al gruppo [G] si deve dunque sostituire un gruppo [L] con ∞^6 elementi (*Gruppo delle trasformazioni di Lorentz*). Tra [G] e [L] deve intercedere una corrispondenza biunivoca Ω [che abbia per [G] ed [L] lo stesso significato che ha ω per (G) ed (L)] nella quale si devono corrispondere i sottogruppi speciali (G) ed (L) sopra definiti. Inoltre Ω deve subordinare tra (G) e (L) la corrispondenza ω, ma questa non è un isomorfismo oloedrico e quindi nemmeno Ω sarà un isomorfismo oloedrico. Noi dunque se vogliamo trovare la trasformazione del gruppo [L] omologa mediante Ω di una data trasformazione G di [G], non possiamo scindere questa nel prodotto di due altre e considerare il prodotto delle omologhe quale trasformazione omologa di G.

Ora si osservi che se G appartiene al sottogruppo speciale (G), la trasformazione L omologa in (L) *si trova con metodo diretto*, come abbiamo ricordato in prefazione; d'altra parte si osservi che se G appartiene al sottogruppo (R) di [G] costituito dalle trasformazioni per le quali è $v = 0$, cioè dalle rotazioni attorno $O \equiv O'$, la omologa di G, in tal caso, è sè stessa perchè il sottogruppo (R) è anche sottogruppo di [L]. Ma allora data una trasformazione G qualunque se la scomponiamo (ciò che è sempre possibile) nel prodotto

$$G = R^{-1}\, G(v)\, R'$$

di due rotazioni e della trasformazione *speciale* di Galileo $G(v)$ (essendo v la velocità che compete a G), possiamo stabilire le trasformazioni di Lorentz corrispondenti *ai fattori* R^{-1}, $G(v)$, R' con *metodo diretto*, ma ciò, però, *non ci autorizza a concludere che la trasformazione* L *omologa di* G *sia data da*

$$L = R^{-1}\, L(v)\, R'$$

perchè, come abbiamo osservato, i gruppi [L] e [G] *non sono oloedricamente isomorfi*.

Ebbene il metodo che si usa in Relatività dà come trasformazione di Lorentz tra k e k', nel caso considerato, la trasformazione $R^{-1}\,L(v)\,R'$ [1],

Tutto al più la trasformazione $R^{-1}\,L(v)\,R'$ si potrebbe considerare *per definizione* la trasformazione di Lorentz che compete al caso considerato, ma tale definizione sarebbe *puramente matematica* e *fisicamente arbitraria*. E poi resterebbe sempre la questione pregiudiziale posta nella prefazione.

2. La seconda osservazione che vogliamo fare verte sul modo come in Relatività si costruisce il gruppo [L] (*a parte l'arbitraria determinazione delle singole trasformazioni, caso per caso*).

Verificato che le trasformazioni *speciali* di Lorentz lasciano inalterate le equazioni dell'elettrodinamica, si definisce per gruppo di trasformazioni di Lorentz il gruppo delle trasformazioni fra le quaterne x, y, z, t e x', y', z', t' rispetto alle quali le equazioni dell'elettrodinamica restano invariate [2].

Il Poincaré ha costruito tale gruppo [3] e ha trovato che si può definire in due modi: o il gruppo delle trasformazioni lineari quaternarie che lasciano invariata la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \;(^4),$$

o il gruppo delle trasformazioni che si ottengono moltiplicando a destra e a sinistra il gruppo speciale di Lorentz (L) per tutte le trasformazioni tra $x'\,y'\,z'$ e x, y, z che lasciano invariata la forma

$$x^2 + y^2 + z^2$$

(cioè per tutte le rotazioni attorno all'origine).

Quindi le trasformazioni di Lorentz del gruppo [L] sono ottenute come trasformazioni che godono di una certa proprietà e non mai come trasformazioni corrispondenti ai singoli casi di moto traslatorio dei due sistemi k e k'.

Ora il Poincaré cercando il gruppo delle trasformazioni che lasciano inalterate le equazioni dell'elettrodinamica, trovò un gruppo, che chiamò *gruppo di Lorentz, con* ∞^7 *elementi e quindi insostituibile al gruppo* ∞^6 [G]. Per lo scopo a cui mirava fu allora costretto a considerare, *senza alcun fondamento fisico*, un sottogruppo ∞^6 di tale gruppo di Lorentz, sottogruppo che indicò con P (e che coincide col gruppo [L]).

(1) Vedi loc. cit. (1) pag. 102. La $L(v)$ là è indicata con A.

(2) Le equazioni dell'elettrodinamica sono *covarianti*, meglio che *invarianti* rispetto alla trasformazione di Lorentz (o di Lorentz-Voigt). Cfr. Marcolongo, *Relatività*, pag. 97.

(3) H. Poincaré, *Sur la dynamique de l'électron*. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 21, 1906. § 4, pag. 144).

(4) Il Poincaré considera c come unità di misura.

Ora ciò fa vedere ancor meglio come la ricerca del gruppo di trasformazioni [L], fatta in Relatività, *sia una ricerca matematica, indipendente dalla effettiva considerazione dei singoli casi di moto traslatorio dei due sistemi k e k'.*

E ciò sembra che non sia molto a favore delle solidità delle ***basi fisiche*** della teoria einsteiniana.

Fisica terrestre. — *Ulteriori ricerche sul terremoto del 15 marzo 1923.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio V. Cerulli [1].

In altra mia Nota [2] mi sono occupato della posizione e dell'ora epicentrale di questo notevole terremoto e della propagazione delle onde sismiche longitudinali. La determinazione della velocità di quelle trasversali è senza dubbio più difficile, tanto che il chmo prof. G. Grablovitz, nello studio dello stesso terremoto [3], ha creduto di rinunciarvi, *perchè l'enormità dei distacchi*, egli dice, *fra le distanze calcolate* (in base a S-P, cioè, al ritardo delle onde trasversali sulle longitudinali) *e le vere basta a toglier fiducia nel suo apprezzamento per la maggior parte delle stazioni.* Malgrado ciò, io ritenni utile nella mia 1ª Nota [4], sullo stesso argomento, di fare un tentativo al riguardo, che ora mi propongo di ripetere in migliori condizioni, per essere venuto in possesso di parecchi altri dati orarî. Il numero degli osservatorî fino ad oggi conosciuti, i quali concorrono a questa mia nuova indagine, ammontano a 56; però per 3 di essi (Benevento, Trento e Messina) non è dato S, ma soltanto la distanza epicentrale preconizzata; per altri 4 (Heidelberg, Parigi, Kew e Liverpool) il valore di S è troppo anormale per poter essere utilizzato; ed altri 5 si trovano a distanze epicentrali ben più considerevoli, e meritano quindi una discussione a parte; sicchè i dati orarî disponibili si riducono a soli 44.

Analogamente a quanto feci per il calcolo della velocità delle onde longitudinali, li ho divisi in 5 gruppi, come si vede nella tabella, posta in fine della presente Nota, e osservo che anche adesso il I gruppo contiene le sole

[1] Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924.

[2] *Velocità delle onde longitudinali nel terremoto del 15 marzo 1923* (Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, 2 dic. 1923).

[3] *Sul terremoto dalmato del 15 marzo 1923* (ivi, 20 agosto 1923).

[4] *Il terremoto dell'Erzegovina del 15 marzo 1923*, ecc. (ivi, 22 aprile 1923).