ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 marzo 1924.

V. VOLTERRA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Idromeccanica. — *Rotazioni viscose.* Nota del Corrispondente UMBERTO CISOTTI [1].

È noto che fra i moti compatibili colla natura fluida di una massa fluida naturale, sottoposta all'azione di forze conservative, vi sono le rotazioni di insieme, necessariamente uniformi [2]. In movimenti simili non ha naturalmente modo di manifestarsi la natura viscosa del fluido, che si rende palese per lo più quando le particelle hanno occasione di scorrere le une sulle altre, ciò che non avviene nei moti rigidi in generale e nelle rotazioni rigide in ispecie. Il mancato intervento della viscosità ha luogo non solamente per ciò che concerne le caratteristiche cinetiche e strutturali, ma altresì nella distribuzione degli sforzi, che definisce lo stato interno di tensione [3].

Vogliamo ora proporci di indagare la possibilità di moti rotatori, attorno a un asse fisso, compatibili colla natura fluida e viscosa di una massa incomprimibile, nei quali si suppone ogni particella dotata di moto circo-

(1) Presentata nella seduta del 17 febbraio 1924.

(2) Cisotti, *Sui moti rigidi di una massa fluida limitata* [questi Rendiconti, vol. XXV, 1° sem. 1916, pag. 635].

(3) Cfr. Cisotti, *Influenza della viscosità sul moto di una massa liquida la cui superficie libera conserva la forma ellissoidale* [questi Rendiconti, vol. XXXII, 2° sem. 1923, pag. 271].

lare, in un piano normale all'asse e col centro sull'asse stesso, diverso da una particella all'altra. Qui interviene in modo essenziale la natura fluida e il carattere viscoso della massa nel regolare la legge del movimento e la distribuzione degli sforzi interni. Questa indagine forma oggetto della presente Nota. La velocità angolare di ogni particella risulta funzione del tempo e della sola distanza della particella dall'asse fisso [n.[i] 3 e 4], che deve soddisfare a un'equazione lineare del terzo ordine [n. 5], facilmente riducibile al secondo, della cui integrazione mi occuperò in una prossima Nota. È degna di rilievo la circostanza che ogni particella fluida nel descrivere la propria traiettoria circolare è altresì animata da una rotazione propria attorno ad un asse parallelo all'asse fisso [n. 6] e infine [n. 7] che la distribuzione degli sforzi può rimanere influenzata dal numero dei giri che la massa fluida ha effettuato attorno all'asse fisso.

1. *Richiamo delle equazioni indefinite del moto di masse fluide incomprimibili.* — In forma vettoriale, sono le seguenti:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} - \nu\, \Delta_2 \mathbf{v} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\, \mathbf{v}^2 + p - \mathrm{U}\right) = 0\,, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\,, \end{cases}$$

dove: $\mathbf{v}$ è la velocità, ν il coefficiente di viscosità diviso per la densità, p il valore della pressione che, *caeteris paribus*, corrisponderebbe allo stato fluido perfetto ($\nu = 0$), U il potenziale delle forze di massa e infine Δ_2 è l'operatore di Laplace. — Richiamo ancora la relazione vettoriale che definisce la distribuzione degli sforzi:

$$(2)\qquad \Phi_n = p\mathbf{n} - 2\nu \frac{d\mathbf{v}}{dn} + \nu(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \wedge \mathbf{n}\,,$$

in cui Φ_n è lo sforzo unitario relativo a un elemento superficiale di vettore normale unitario $\mathbf{n}$ e n designa pure la direzione e il verso di $\mathbf{n}$.

2. *Rotazioni individuali attorno a un asse fisso.* — Sia a un asse fisso, $\mathbf{k}$ un vettore unitario orientato come a e si ponga

$$(3)\qquad \mathbf{v} = \omega \mathbf{k} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O})\,,$$

designando $\mathbf{v}$ la velocità di P, O la proiezione di P sull'asse a. Se lo scalare ω è indipendente da P, questa relazione definisce una rotazione rigida di insieme attorno all'asse a; più generalmente supporremo ω funzione di P, oltre che del tempo t, allora la (3) definisce per ogni particella un moto circolare, in un piano normale all'asse e col centro sull'asse stesso, diverso però in generale dall'una all'altra.

Il fatto che (3) deve soddisfare alle equazioni (1), impone una legge che deve presiedere alla variabilità di ω, che vorremo ora stabilire.

3. *Condizione proveniente dall'incomprimibilità.* — Avendosi dalla (3)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = [P - O] \times [(\operatorname{grad} \omega) \wedge \mathbf{k}] \ (^1),$$

la seconda delle (1) esige l'annullarsi del prodotto misto del secondo membro e ciò significa che il vettore grad ω deve avere la giacitura dei vettori $\mathbf{k}$ e $P - O$, cioè deve essere parallelo al piano (meridiano) determinato dal punto P e dall'asse a. Ne consegue che, introducendo le coordinate semipolari r, θ, z del punto P (con che r è la distanza di P dall'asse a, θ la longitudine e z l'altitudine da un piano prefissato normale all'asse a) si ha

$$(4) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0 ,$$

cioè ω *è indipendente da* θ.

4. *Indipendenza di* ω *da* z. — Dalla (3), prendendo il rotore di entrambi i membri, si ottiene (²)

$$(5) \qquad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(2\omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) \mathbf{k} - \frac{\partial \omega}{\partial z} (P - O) .$$

Per la (5) e per la (3), con facili calcoli, si ottiene

$$(6) \qquad (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = -\omega r^2 \frac{\partial \omega}{\partial z} \mathbf{k} - \omega \left(2\omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) (P - O) .$$

(¹) Basta rilevare [cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *An. Vect. Gen. I Transf. linéaires*, pag. 81] che

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} [\omega \mathbf{k} \wedge (P - O)] = (P - O) \times \operatorname{rot}(\omega \mathbf{k}) - \omega \mathbf{k} \times \operatorname{rot}(P - O) ,$$

dalla quale scende la formula sopra scritta, quando si tengano presenti le seguenti relazioni:

$$\operatorname{rot}(P - O) = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{k} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot}(\omega \mathbf{k}) = (\operatorname{grad} \omega) \wedge \mathbf{k} .$$

(²) Si ha infatti,

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} [\omega \mathbf{k} \wedge (P - O)] =$$
$$= \left[\operatorname{div}(P - O) - \frac{d(P - O)}{dP} \right] \omega \mathbf{k} - \left[\operatorname{div}(\omega \mathbf{k}) - \frac{d(\omega \mathbf{k})}{dP} \right] (P - O) ,$$

dalla quale, tenendo presente che, qualunque sia il punto fisso O, è $\operatorname{div}(P - O) = 3$, e inoltre che è

$$\operatorname{div}(\omega \mathbf{k}) = \frac{\partial \omega}{\partial z} \ , \ \frac{d(P - O)}{dP} \omega \mathbf{k} = \omega \mathbf{k} \ , \ \frac{d(\omega \mathbf{k})}{dP} (P - O) = r \frac{\partial \omega}{\partial r} ,$$

si deduce la formula sopra scritta.

Si ha pure [1]

$$\Delta_2 \mathbf{v} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\mathbf{v}. \tag{7}$$

E infine dalla (3), e per la (3) stessa

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial t}\mathbf{k}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{O}) = \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial t}\mathbf{v}.$$

Ciò premesso, per questa e per le (3), (6) e (7), la prima delle (1) diviene

$$\omega r^2 \frac{\partial\omega}{\partial z}\mathbf{k} + \omega\left(2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)(\mathrm{P}-\mathrm{O}) + \tag{8}$$

$$+\frac{1}{\omega}\left\{\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right\}\mathbf{v} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + p - \mathrm{U}\right).$$

Essendo nullo identicamente il rot del secondo membro, dovrà esserlo pure quello del primo membro; ciò porta alla seguente relazione vettoriale [2]:

$$\mathrm{A}\mathbf{k}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{O}) + \mathrm{B}(\mathrm{P}-\mathrm{O}) + \mathrm{C}\mathbf{k} = 0, \tag{9}$$

[1] Basta notare che, tenendo presente la seconda delle (1) e la (5) si ha successivamente

$$\Delta_2\mathbf{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} = -\operatorname{rot}\left\{\left(2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\mathbf{k} - \frac{\partial\omega}{\partial z}(\mathrm{P}-\mathrm{O})\right\}$$

$$= \mathbf{k}\wedge\operatorname{grad}\left(2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) - (\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\operatorname{grad}\frac{\partial\omega}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\cdot\mathbf{k}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{O}) + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\mathbf{k}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{O}),$$

dalla quale, essendo per la (3)

$$\mathbf{k}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{O}) = \frac{1}{\omega}\mathbf{v},$$

si ricava senz'altro la (7).

[2] Con facili calcoli si hanno le seguenti relazioni:

$$\operatorname{rot}\left(\omega r^2\frac{\partial\omega}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\omega r^2\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{k},$$

$$\operatorname{rot}\left\{\omega\left(2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)(\mathrm{P}-\mathrm{O})\right\} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\omega\left(2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\right\}\mathbf{k}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{O}),$$

$$\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{\omega}\left[\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right]\mathbf{v}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\omega}\left[\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right]\left[\left(2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\mathbf{k} - \frac{\partial\omega}{\partial z}(\mathrm{P}-\mathrm{O})\right] +$$

$$+ r\omega\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\omega}\left[\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right]\right\}\mathbf{k} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\omega}\left[\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right]\right\}(\mathrm{P}-\mathrm{O}),$$

dalle quali scende la (9).

avendo posto, per brevità,

$$(10)\quad \begin{cases} A = 2\omega \dfrac{\partial\omega}{\partial z}, \\ B = -\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial z}\left\{\nu\left(\dfrac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2}+\dfrac{3}{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial r}\right)-\dfrac{\partial\omega}{\partial t}\right\} - \\ \qquad -\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\dfrac{1}{\omega}\left[\nu\left(\dfrac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2}+\dfrac{3}{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial r}\right)-\dfrac{\partial\omega}{\partial t}\right]\right\}, \\ C = \dfrac{1}{\omega}\left[\nu\left(\dfrac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2}+\dfrac{3}{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial r}\right)-\dfrac{\partial\omega}{\partial t}\right]\left[2\omega + r\dfrac{\partial\omega}{\partial r}\right] + \\ \qquad + r\omega\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{\dfrac{1}{\omega}\left[\nu\left(\dfrac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2}+\dfrac{3}{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial r}\right)-\dfrac{\partial\omega}{\partial t}\right]\right\}. \end{cases}$$

Moltiplicando scalarmente la (9) una prima volta per $\mathbf{k} \wedge (P - O)$, una seconda volta per $P - O$ e una terza volta per $\mathbf{k}$ si ottengono le tre relazioni scalari

$$(11)\qquad A = 0 \quad , \quad B = 0 \quad , \quad C = 0 ,$$

che equivalgono alla (9) stessa. Tenendo presenti le (10), la prima di queste esige che sia (escluso il caso di $\omega = 0$, che non ha manifestamente interesse)

$$(12)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial z} = 0 ,$$

la quale esprime che ω *è indipendente da* z.

5. *Equazione caratteristica in* ω. — Per la (12) e per la seconda di (10), la seconda di (11) risulta soddisfatta. Infine la terza di (11), per la terza di (10) e la (12), esige che sia

$$\frac{1}{\omega}\left[\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)-\frac{\partial\omega}{\partial t}\right]\left[2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right] + \\ + r\omega\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\omega}\left[\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)-\frac{\partial\omega}{\partial t}\right]\right\} = 0 ,$$

che, semplificata, diviene

$$(13)\qquad \nu r\left(\frac{\partial^3\omega}{\partial r^3}+\frac{5}{r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{3}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) = 0 .$$

Se si pone

$$(14)\qquad \Omega = 2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r},$$

la (13) si trasforma nella seguente equazione in Ω:

$$(15)\qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\Omega}{\partial t} = 0 .$$

In conclusione, $\omega(t,r)$ deve soddisfare all'equazione differenziale (13) che è lineare del terzo ordine; ma mediante l'introduzione della funzione $\Omega(t,r)$ si può far dipendere il problema dalla integrazione della precedente equazione (15) che è ancora lineare ma di secondo ordine nella Ω. Integrata questa, la (14) darà ω mediante quadrature.

6. *Significato cinematico di* Ω. — Avuto riguardo alla (12), la (5) per la (14) può scriversi

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \Omega \mathbf{k} .$$

Questa mostra che il moto in questione è rotazionale e il vortice è sempre parallelo all'asse fisso e di valore $\Omega/2$. Solamente quando è ω indipendente da r, risulta dalla (14) $\Omega/2 = \omega$, ossia il vortice coincide colla velocità angolare della rotazione di insieme. Escluso questo caso, ogni particella, nel mentre descrive la propria traiettoria circolare, ruota attorno a se stessa con una velocità angolare $\Omega/2\,\mathbf{k}$.

7. *Distribuzione degli sforzi.* — La (8), per le (12) e (14), diviene

$$(16)\qquad \omega\Omega(P-O) + \left(\frac{\nu}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\mathbf{k}\wedge(P-O) = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + p - U\right).$$

Ora è

$$(17)\qquad \omega\Omega(P-O) = \operatorname{grad}\int_{r_0}^{r} r\,\omega\,\Omega\,dr .$$

Inoltre, posto

$$(18)\qquad \Lambda = \frac{\nu}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{\partial\omega}{\partial t},$$

si ricava, tenendo conto di (14),

$$r\frac{\partial\Lambda}{\partial r} + 2\Lambda = \nu\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) - \frac{\partial\Omega}{\partial t},$$

e per la (15),

$$r\frac{\partial\Lambda}{\partial r} + 2\Lambda = 0 ,$$

che, integrata, porge

$$(19)\qquad \Lambda = \frac{c(t)}{r^2},$$

essendo $c(t)$ una funzione arbitraria della sola t.

Si ha dunque, portando in (18),

$$\frac{\nu}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{c(t)}{r^2},$$

per cui

$$\left(\frac{\nu}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\mathbf{k}\wedge(P-O) = c(t)\operatorname{grad}\theta .$$

Per questa e per la (17), dalla (16), integrando, si deduce

$$p = \int_{r_0}^{r} r\omega\Omega\, dr + c(t)\,\theta - \frac{1}{2}v^2 + \mathrm{U} + \text{funzione di } t. \tag{20}$$

Questa definisce p, con che per mezzo della (2) e della (3) risulta determinata la distribuzione degli sforzi, quando sia noto ω (e quindi Ω).

È da rilevarsi che (se non è $c = 0$) p non è funzione uniforme, perchè quando una particella ritorna, dopo aver percorso l'intera circonferenza, nella primitiva posizione p risulta aumentato di $2\pi c$:

Si può concludere che sulla distribuzione degli sforzi può avere influenza (quando non è $c = 0$) anche il numero dei giri che la massa fluida ha effettuato attorno all'asse fisso a.

Geologia. — *Nuove osservazioni sulle falde di ricoprimento dei monti Ausoni e Lepini e del Preappennino campano-laziale.* Nota del Corrisp. ing. SECONDO FRANCHI [1].

Nel presentare la prima Nota su questo argomento, nella seduta del 13 gennaio u. s., allo scopo di dare nel modo più sintetico un'idea del grande slittamento dei monti Ausoni-Lepini, io dicevo che il suo fronte è costituito dall'alta e talora molto scoscesa parete calcarea che da Segni a Sgurgola, a Morolo, a Patrica, a Castro dei Volsci, a Falvaterra, a S. Giovanni Incarico e fin oltre Pico, nel versante destro della Valle Latina, si vede sovrapposta ad una regione bassa di terreni terziarî, e che si può passare in rivista, stando in treno sempre a non grandi distanze, sull'estensione di circa 70 km. Quanto alla entità del movimento non mi era allora possibile di valutarla e dovetti limitarmi ad affermare che questo era almeno di 4 o 5 km. [2].

L'ulteriore esame delle carte geologiche della regione, rilevate molti anni or sono da Michele Cassetti [3] e qualche gita nei dintorni di Formia, mi permettono ora di indicare il minimo dello slittamento compiuto, che è di circa 25 chilometri, di segnalare altri reali ricoprimenti meno grandiosi e meno tipici, ma pure importantissimi per la riprova che essi ci porgono, che noi siamo in una regione di ricoprimenti (*pays de nappes*), di individuare estesissime linee di contatto anormale che hanno certamente grandissima importanza nella tettonica del versante tirreno dell'Appennino, e di accennare alla probabilità di altri importanti ricoprimenti.

(1) Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

(2) Faccio ora una riserva che omisi di fare al titolo della precedente Nota, ed è che nello slittamento sono state convogliate delle masse di calcari terziarî insieme a quelli secondarî che le sopportavano, avendo i primi lo stesso comportamento dei secondi rispetto alle azioni meccaniche.

(3) Inedite, esistenti presso il R. Ufficio Geologico.