ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul genere aritmetico delle varietà algebriche a quattro dimensioni.* Nota di GIACOMO ALBANESE, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO [1].

Nella geometria sopra una varietà algebrica V_k a k dimensioni, è fondamentale una doppia definizione del genere aritmetico di V_k.

La prima definizione si ottiene dalla formula di postulazione $v(l)$ di V_k, pensata priva di punti multipli in un certo spazio S_r. Scritta $v(l)$ sotto la forma:

$$v(l) = (1 + p_0)\binom{l+k}{k} - (p_0 + p_1)\binom{l+k-1}{k-1} +$$
$$+ \cdots + (-1)^{k-1}(p_{k-2} + p_{k-1})(l+1) + (-1)^k(p_{k-1} + p_k),$$

il Severi [2] chiama genere aritmetico di V_k l'ultimo coefficiente p_k di questa formula.

La seconda definizione si ottiene, pensando V_k (d'ordine n) in uno spazio S_{k+1}, come proiezione *generica* di una varietà della stessa dimensione senza punti multipli [3] e chiamando genere aritmetico P_a di V_k « il numero virtuale delle forme indipendenti d'ordine $n-k-2$ aggiunte a V_k; nell'ipotesi che la formula di postulazione $d(l)$ della sua varietà doppia D, esprima la postulazione di D anche per $l = n - k - 2$ »:

$$P_a = \binom{n-1}{k-1} - d(n-k-2).$$

La dimostrazione dell'uguaglianza di P_a e p_k presenta serie difficoltà anche nel caso più semplice delle varietà a tre dimensioni, $k = 3$. Ma per queste varietà il Severi è riuscito a dimostrare che è effettivamente $p_3 = P_a$.

Nella stessa memoria è anche indicato un procedimento per il caso generale della V_k. Ma per la validità di tale procedimento (ed il Severi lo nota esplicitamente) bisogna ammettere come postulato che: « ogni varietà

(1) Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924

(2) Severi, *Fondamenti per la geometria sopra una varietà algebrica*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXVIII, 1909.

(3) Allora V_k possiede una varietà D a $k-1$ dimensioni doppia, una varietà D_1 a $k-2$ dimensioni tripla per V_k e per D, etc. etc.

dotata di punti multipli, si può considerare come limite di una varietà senza singolarità, appartenente allo stesso spazio ».

Ora questa proprietà non deve essere facile a dimostrarsi se si pensa che nel caso più elementare delle curve dello spazio ordinario ancora non si conosce interamente [1].

Risolta la questione dell'uguaglianza, per i numeri p_k e P_a si presenta un altro problema fondamentale, e cioè, la loro invarianza assoluta attraverso trasformazioni birazionali, senza di che essi perdono ogni qualsiasi interesse.

Il Severi ha risoluto anche questo problema per le varietà a tre dimensioni, ma per le V_k generali, nulla ancora si conosce.

In questa Nota ed in una successiva, mi propongo di risolvere i due problemi sopra esposti, per le varietà a quattro dimensioni.

1. Sia V una varietà algebrica a quattro dimensioni, irriducibile, priva di punti multipli in un certo spazio S_r.

Indichiamo con $|E|$ il sistema delle sue sezioni iperpiane e con $|D| = |kE|$ un suo multiplo secondo k.

Estendendo a queste varietà, gli sviluppi contenuti nella citata Memoria del Severi, nei numeri da 8 a 13, con calcoli non molto laboriosi, e che omettiamo per ragioni di brevità, si arriva alle formule:

$$R_k = [D^4] - [D^3] + [D^2] - [D] + p_4 + 3 \tag{1}$$

$$\varrho_k = [D] + P_a - 1 \tag{2}$$

$$P_a - p_k = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + 3\,, \tag{3}$$

dove k indica un numero intero sufficientemente alto ($> k_0$), R_k e ϱ_k indicano le dimensioni del sistema $|kE|$ e del suo sistema aggiunto ed Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_3 il grado virtuale, il genere curvilineo, il genere aritmetico superficiale ed il genere aritmetico tridimensionale del sistema canonico $|\Gamma|$ di V.

Consideriamo il sistema canonico di una varietà canonica Γ, esso coincide col doppio $|2\Gamma^2|$ del suo sistema caratteristico.

Indichiamo con ω_0, ω_1, ω_2 il grado virtuale, il genere curvilineo ed il genere aritmetico superficiale del sistema $|2\Gamma^2|$. Per note formule si avrà:

$$\omega_0 = 8\Omega_0\,, \qquad \omega_1 = 4\Omega_1 + 4\Omega_0 - 3\,, \qquad \omega_2 = 2\Omega_2 + \Omega_1\,. \tag{4}$$

Ora sopra Γ i numeri ω_0, ω_1 ed ω_2, verificano le due relazioni:

di Pannelli

$$2\omega_1 = 3\omega_0 + 2 \tag{5}$$

[1] Severi-Löffler, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*. Anhang G n. 10, dove la proprietà è dimostrata per le curve C_n di genere p, di uno spazio S_r, quando $n \geq \frac{r}{r+1}p + r$.

di Severi

(6) $$\omega_0 - \omega_1 + \omega_2 + 4 = 2\Omega_3 .$$

Sostituendo nella (5) le formule (4) e riducendo si ha:

(7) $$\Omega_1 = 2\Omega_0 + 1 .$$

Sostituendo nella (6) le formule (4) e (7) con breve calcolo si ha:

(8) $$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + 3 = 0$$

che per la (3) ci dà precisamente: $P_a = p_4$.

Osservazione. — La (7) e la (8) sono le relazioni fondamentali a cui soddisfano i caratteri del sistema canonico di ogni varietà a quattro dimensioni.

Si osservi perciò che i primi due caratteri Ω_0 ed Ω_1, grado virtuale e genere curvilineo del sistema canonico di una V_k, finchè k è uguale ad 1, 2, 3 o 4 verificano la relazione

$$2\Omega_1 = k\Omega_0 + 2 .$$

Ora questa formula è vera in generale qualunque sia k, come avrò occasione di dimostrare in un altro lavoro.

Dimostrata l'uguaglianza di p_4 e P_a, che ora indicheremo sempre con P_a, le formule (1) e (2) ci permettono di enunciare i teoremi:

In una varietà a quattro dimensioni, priva di punti multipli:

I. — *Un multiplo molto alto del sistema delle sezioni iperpiane è regolare.*

II. — *Il sistema aggiunto ad un multiplo molto alto del sistema delle sezioni iperpiane è regolare.*

2. Indichiamo ora con $|M|$ un sistema lineare completo di V, e sia N una varietà irriducibile parzialmente contenuta in $|M|$. Dette σ_m e σ_{m-n} le sovrabbondanze dei sistemi $|M|$ ed $|M - N|$, e con s_{mn} e d_{mn} la sovrabbondanza ed il difetto di completezza del sistema $|MN|$ che $|M|$ stacca su N, si calcola facilmente, come per le superficie e per le varietà di tre dimensioni, la relazione:

(9) $$\sigma_m = \sigma_{m-n} + s_{mn} - d_{mn} .$$

Perciò se tre dei numeri σ_m, σ_{m-n}, s_{mn}, d_{mn} son nulli anche il quarto è nullo.

In particolare notiamo:

III. — *Se un sistema completo $|M|$ è regolare e stacca sopra una varietà* N *un sistema regolare e completo, il sistema residuo $|M - N|$ è regolare.*

IV. — *Se un sistema completo e regolare $|M|$ stacca sopra una varietà irriducibile* N, *un sistema regolare, ed il sistema residuo $|M - N|$ è pur esso regolare; il sistema sezione $|MN|$ è anche completo.*

Ciò detto indichiamo con G una qualsiasi varietà a tre dimensioni di V, anche spezzata e comunque dotata di punti multipli.

Essendo V per ipotesi, priva di singolarità, il sistema delle forme d'ordine λ sufficientemente alto ($\lambda > \lambda_0$), dello spazio ambiente, passanti per G, staccherà altrove sopra V, un sistema residuo $|H| = |\lambda E - G|$, irriducibile e privo di punti base. Sicchè la generica varietà H sarà irriducibile e senza punti multipli e per μ molto alto, $\mu > \mu_0$, le forme d'ordive $\lambda + \mu$ staccheranno su H un sistema regolare e completo (v. Severi, l. c. n. 2 e n. 11). E siccome il sistema $|(\mu + \lambda)E|$ che le stesse forme staccano su V per il teorema I, quando μ è molto alto, è completo e regolare, applicando il teorema III anche il sistema residuo $|(\mu + \lambda)E - H| = |(\mu + \lambda) E - \lambda E - G| = |\mu E + G|$ è regolare e si ha:

V. — *Se V è una varietà a quattro dimensioni priva di singolarità in un certo spazio S_r, $|E|$ il sistema delle sue sezioni iperpiane, e G una sua varietà a tre dimensioni arbitraria (anche spezzata in più parti e comunque dotata di singolarità), i sistemi $|\mu E + G|$ per μ sufficientemente alto ($\mu > \mu_0$), sono tutti regolari.*

Matematica. — *Dei sistemi lineari tangenti ad un qualunque sistema di forme.* Nota del dott. BENIAMINO SEGRE, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

Nella presente Nota svolgo alcune considerazioni sui sistemi lineari di forme di S_r, *tangenti* ad un dato sistema infinito di forme dello S_r, in una forma di quello. Tali considerazioni, pur non essendo tutte sostanzialmente nuove, ed essendo abbastanza ovvie, mi occorrono, così esposte, in un lavoro di prossima pubblicazione in questi stessi Rendiconti, ed in altri lavori.

1 In uno S_r siano $x_0, x_1, \cdots, x_r$ delle coordinate proiettive omogenee di punto. Una ipersuperficie d'ordine m dello S_r, che indicheremo genericamente con F^m, si rappresenterà analiticamente annullando una *forma* di grado m nelle (x); questa conterrà linearmente ed omogeneamente

$$\sigma + 1 = \binom{m+r}{m}$$

coefficienti che diremo a_k (per $k = 0, 1, \cdots \sigma$), e sarà indicata con $F[x; a]$.

Le F^m di S_r si possono pensare come i punti di uno S_σ, interpretando le a_k come coordinate proiettive omogenee di punto in uno S_σ. Un sistema $\Sigma\ \infty^t$ ($t > 0$) di F^m dello S_r, sarà una V_t di questo S_σ, e si potrà

[1] Presentata nella seduta del 17 febbraio 1924.