ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Ciò detto indichiamo con G una qualsiasi varietà a tre dimensioni di V, anche spezzata e comunque dotata di punti multipli.

Essendo V per ipotesi, priva di singolarità, il sistema delle forme d'ordine λ sufficientemente alto ($\lambda > \lambda_0$), dello spazio ambiente, passanti per G, staccherà altrove sopra V, un sistema residuo $|H| = |\lambda E - G|$, irriducibile e privo di punti base. Sicchè la generica varietà H sarà irriducibile e senza punti multipli e per μ molto alto, $\mu > \mu_0$, le forme d'ordive $\lambda + \mu$ staccheranno su H un sistema regolare e completo (v. Severi, l. c. n. 2 e n. 11). E siccome il sistema $|(\mu + \lambda)E|$ che le stesse forme staccano su V per il teorema I, quando μ è molto alto, è completo e regolare, applicando il teorema III anche il sistema residuo $|(\mu + \lambda)E - H| = |(\mu + \lambda) E - \lambda E - G| = |\mu E + G|$ è regolare e si ha:

V. — *Se* V *è una varietà a quattro dimensioni priva di singolarità in un certo spazio* S_r, $|E|$ *il sistema delle sue sezioni iperpiane, e* G *una sua varietà a tre dimensioni arbitraria (anche spezzata in più parti e comunque dotata di singolarità), i sistemi* $|\mu E + G|$ *per* μ *sufficientemente alto* ($\mu > \mu_0$), *sono tutti regolari.*

Matematica. — *Dei sistemi lineari tangenti ad un qualunque sistema di forme.* Nota del dott. BENIAMINO SEGRE, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

Nella presente Nota svolgo alcune considerazioni sui sistemi lineari di forme di S_r, *tangenti* ad un dato sistema infinito di forme dello S_r, in una forma di quello. Tali considerazioni, pur non essendo tutte sostanzialmente nuove, ed essendo abbastanza ovvie, mi occorrono, così esposte, in un lavoro di prossima pubblicazione in questi stessi Rendiconti, ed in altri lavori.

1 In uno S_r siano $x_0, x_1, \cdots, x_r$ delle coordinate proiettive omogenee di punto. Una ipersuperficie d'ordine m dello S_r, che indicheremo genericamente con F^m, si rappresenterà analiticamente annullando una *forma* di grado m nelle (x); questa conterrà linearmente ed omogeneamente

$$\sigma + 1 = \binom{m+r}{m}$$

coefficienti che diremo a_k (per $k = 0, 1, \cdots \sigma$), e sarà indicata con $F[x; a]$.

Le F^m di S_r si possono pensare come i punti di uno S_σ, interpretando le a_k come coordinate proiettive omogenee di punto in uno S_σ. Un sistema $\Sigma\ \infty^t$ $(t > 0)$ di F^m dello S_r, sarà una V_t di questo S_σ, e si potrà

[1] Presentata nella seduta del 17 febbraio 1924.

rappresentare analiticamente ponendo le a_k funzioni di t parametri essenziali $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$: $a_k = \varphi_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t)$.

Un punto singolare di V_t rappresenterà una F^m di Σ, che diremo *singolare per* questo sistema.

Lo S_t che tocca V_t in un suo punto non singolare, rappresenterà nello S_r un *sistema lineare* ∞^t *di* F^m, che diremo *tangente a* Σ nella F^m omologa del punto considerato di V_t.

Analiticamente il sistema lineare ∞^t tangente a Σ in una sua forma $F[x; \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t)]$ non singolare, è il sistema lineare che congiunge questa forma alle

$$F[x; \frac{\partial}{\partial \lambda_h} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t)] \quad (\text{per } h = 1, 2, \cdots, t).$$

2. Con dei ragionamenti infinitesimali sintetici, od anche utilizzando la precedente rappresentazione analitica, si dimostra facilmente che:

a) Se tutte le F^m di Σ hanno un punto R s-plo a comune, R *è punto base* s-plo *per ogni sistema lineare tangente a* Σ.

b) Se uno $S_{r'}$ subordinato di S_r sega Σ secondo un sistema Σ' ∞^t di forme F'^m d'ordine m, Σ' *ha per sistema lineare tangente in una sua* F'^m *generica, il sistema lineare* ∞^t *sezione con* $S_{r'}$, *del sistema lineare tangente a* Σ *nella* F^m *di* Σ, *di cui la* F'^m *considerata è sezione con* $S_{r'}$.

c) *L'ipersuperficie inviluppo di* Σ, *è costituita dalle varietà base dei diversi sistemi lineari* ∞^t *tangenti a* Σ.

d) Sia O un punto generico di S_r, e Σ_1 il sistema delle F^{m-s} polari s-me di O rispetto alle F^m di Σ. Se F_1^{m-s} è la forma di Σ_1 polare s-ma di O rispetto ad una forma generica fissata, F_1^m, di Σ, *il sistema lineare che tocca* Σ_1 in F_1^{m-s}, *non è altro che il sistema delle polari* s-me *di* O *rispetto al sistema lineare* ∞^t *tangente a* Σ *in* F_1^m.

3. *Se ogni forma del sistema* Σ *ha un punto doppio* $R(\bar{x})$ *variabile, il sistema lineare* ∞^t *tangente a* Σ *in una sua forma generica, ha per punto base il punto doppio a quella relativo* (¹).

Le coordinate $\bar{x}_i$ del punto R saranno funzioni dei t parametri λ_h da cui dipendono le F^m di Σ. Ogni forma di Σ contiene un punto R, onde:

$$(1) \qquad \{F[x; \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t)]\}_{(x=\bar{x})} = 0;$$

anzi tale punto è per ipotesi *doppio* per essa, laonde dovrà aversi:

$$(2) \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} F[x; \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t)]\right\}_{(x=\bar{x})} = 0 \quad (\text{per } i = 0, 1, \cdots, r).$$

(¹) Nel caso che Σ sia *lineare* esso coincide coi suoi sistemi lineari tangenti. In tale ipotesi, pertanto, la proposizione enunciata si riduce ad un ben noto teorema di Bertini sui sistemi lineari di forme.

Derivando ambo i membri della (1) rispetto a λ_h, tenendo presenti le (2) ed inoltre che le φ_k compaiono linearmente in F, si hanno le identità:

$$\{F[x, \frac{\partial}{\partial\lambda_h}\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t)]\}_{(x=\bar{x})} = 0 \quad (\text{per } h = 1, 2, \cdots, t),$$

e queste, in un colla (1), mostrano l'asserto.

Questo teorema si estende facilmente al caso che ogni F^m di Σ abbia più (anche infiniti) punti doppi.

Valendoci poi del teorema stesso, e di quello del n. 2 *d*), si dimostra facilmente il seguente teorema più generale:

Se ogni forma del sistema Σ *ha un punto* R s-plo *variabile* ($s \geq 2$), *il sistema lineare* ∞^t *tangente a* Σ *in una sua forma generica, ha il punto* R *a questa relativo come punto base* (s–1)-plo.

4. Nello S_σ che coi suoi punti rappresenta le F^m di S_r (cfr. n. 1), vi è luogo a considerare una ipersuperficie H, imagine delle F^m di S_r che hanno *punto doppio*.

L'ordine h di H non è altro che il numero delle F^m di un fascio generico dello S_r che hanno punto doppio, e cioè il numero dei punti di S_r che annullano la matrice Jacobiana di due F^m generiche di S_r; è quindi: $h = (r+1)(m-1)^r$ [1].

Poichè le F^m di S_r aventi un dato punto di S_r come doppio, formano un sistema lineare $\infty^{\sigma-(r+1)}$, segue che H *contiene un insieme razionale* ∞^r *di* $S_{\sigma-r-1}$, di cui ne passa *uno* per un punto generico di H.

Se applichiamo il teorema del n. 3 al sistema algebrico $\infty^{\sigma-1}$ delle F^m di S_r che hanno punto doppio, otteniamo che questo sistema in una sua forma generica di cui sia R il punto doppio, ha per sistema tangente un sistema lineare $\infty^{\sigma-1}$ di F^m avente R per punto base, sistema lineare che quindi *è quello costituito da tutte le* F^m *di* S_r *che passano per* R. Questa proprietà fornisce in S_σ:

L'ipersuperficie H *ha solamente* ∞^r *iperpiani tangenti*; *ognuno di questi la tocca lungo uno degli* ∞^r $S_{\sigma-r-1}$ *di cui essa si compone*; *vi sono* m^r *di tali iperpiani tangenti che contengono uno* S_{r-1} *generico di* S_σ [2].

5. Un sistema Σ ∞^1 di F^m dello S_r, si rappresenta in S_σ con una curva L; e si vede senza difficoltà che se Σ è algebrico e d'indice g, la

[1] Cfr. C. Segre, *Encykl. d. math. Wiss.*, III, 2, Heft 7, § 39, pp. 938-939.

[2] Alcune proprietà di H, per il caso particolare $m = 2$, sono state esposte da G. Scorza, nella Nota *La varietà di Veronese e le forme quadratiche definite*, Rend. Acc. delle sc. fis. e mat. di Napoli, serie III, vol. 21 (1915), pag. 297; ed altre discendono facilmente dalle suesposte considerazioni.

curva L è algebrica e d'ordine g; e viceversa. Da qui, in base anche al n. 4, segue:

Un sistema Σ algebrico ∞^1, d'indice g di F^m dell S_r, contiene generalmente $gh = g(r+1)(m-1)^r$ forme con punto doppio. Se Φ è una forma non singolare per Σ avente un punto doppio R, senza presentare altre particolarità, condizione necessaria e sufficiente affinchè Φ assorba due delle forme di Σ con punto doppio è che R sia punto base del fascio di forme tangente a Σ in Φ.

6. Se Σ è un qualunque sistema ∞^1 di F^m dello S_r, esso si rappresenterà in S_σ mediante una curva L. Consideriamo lo spazio S_l $(l \leq \sigma)$ di appartenenza di L: in corrispondenza avremo nello S_r un sistema lineare ∞^l di F^m, che si dirà il sistema lineare *di appartenenza* di Σ.

La curva L ammette in un suo punto generico, per $d = 1, 2, \cdots, l$, uno S_d osculatore. Nello S_r avremo per ogni F^m generica di Σ, un sistema lineare ∞^d di F^m, che si dirà *osculatore* a Σ nella F^m considerata. Il sistema lineare ∞^1 di forme che oscula Σ in una sua F^m, non è altro che il fascio di forme in essa tangente a Σ; il sistema lineare ∞^l che oscula Σ in una sua forma generica, non è altro che il sistema lineare di appartenenza di Σ.

Si dimostrano facilmente i seguenti teoremi:

a) Se tutte le F^m di Σ hanno un punto R *s-plo* a comune, *il punto* R *è punto base s*-plo *per ogni sistema lineare ∞^d osculatore a Σ.*

b) Uno $S_{r'}$ subordinato generico di S_r sega Σ secondo un sistema Σ' ∞^1 di forme F'^m d'ordine m; quest'ultimo ha *per sistema lineare* ∞^d (ove d non superi la dimensione del sistema lineare di appartenenza di Σ') *osculatore in una sua F'^m generica, il sistema lineare ∞^d, sezione con $S_{r'}$ del sistema lineare ∞^d osculatore a Σ nella F^m di cui la F'^m considerata è sezione con $S_{r'}$.*

c) Se le F^m di Σ hanno un punto R s-plo variabile, *ogni sistema lineare ∞^d $(d \leq l; d \leq s)$ osculatore a Σ in una sua forma generica, ha il punto* R *a questa relativo, come punto base* $(s-d)$-plo (almeno).

Il sistema lineare ∞^l osculatore a Σ in una sua forma generica *contiene* il sistema stesso Σ. Dall'ultima proposizione discende quindi il corollario:

d) *Se Σ è un sistema ∞^1 di F^m dello S_r, aventi un punto* R s-plo *variabile, ed inoltre il sistema lineare di appartenenza di Σ ha la dimensione l, con $l < s$, la curva luogo dei punti R è multipla secondo $s-l$* (almeno) *per ogni F^m di Σ.*