ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 marzo 1924.

V. SCIALOJA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI.

Matematica. — *Ancora sulle funzioni trascendenti semplici.* Nota del Socio S. PINCHERLE [1].

1. In una precedente Nota, presentata all'Accademia nella sua seduta del 13 gennaio u. s., ho dato alcune proprietà delle funzioni analitiche o rami ad un valore di funzioni analitiche che in tutto il piano della variabile complessa x, ad eccezione di un taglio $\boldsymbol{t}$ fatto fra 1 e $+\infty$ lungo il semiasse reale positivo, sono rappresentate da espressioni della forma

$$f(x) = \int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t-x}, \tag{1}$$

dove $\sigma(t)$ è una funzione della variabile reale t tale che sia convergente l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t}. \tag{2}$$

Una tale funzione (1), cui ho dato il nome di trascendente semplice e che è una trasformata della $\sigma(t)$, è, come si è visto, regolare in tutto il piano x ad eccezione al più del taglio $\boldsymbol{t}$; è rappresentabile, per $|x| < 1$, da una serie di potenze $\Sigma c_n x^n$ il cui coefficiente c_n è il valore, per $z = n$, di una funzione determinante regolare per $R(z) > 0$; di questa ultima proposizione vale la reciproca; infine il salto della $f(x)$ quando x attraversa il taglio $\boldsymbol{t}$ è dato da $2\pi i\,\sigma(t)$ se nel punto t di $\boldsymbol{t}$ la $\sigma(t)$ è continua, e da

(1) Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

$\pi i(\sigma(t+0)+\sigma(t-0))$ se t è per $\sigma(t)$ un punto di discontinuità di prima specie. Queste proprietà si mantengono senza modificazioni di carattere essenziale se alla condizione della convergenza di (2) si sostituisce quella della convergenza di

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t^m}\,, \quad m > 1\,.$$

2. Si sostituisca ora, nella (1), l'espressione

$$\frac{1}{t-x} = \int_0^\infty e^{-(t-x)u}\,du \tag{3}$$

valida per $R(t) > R(x)$ e quindi, nel nostro caso, per $R(x) < 1$; viene allora, invertendo le integrazioni, il che è manifestamente lecito:

$$f(x) = \int_0^\infty e^{ux} \int_1^\infty e^{-ut}\,\sigma(t)\,dt\,du\,. \tag{4}$$

Ora, l'espressione

$$\varphi(u) = \int_1^\infty e^{-ut}\,\sigma(t)\,dt$$

rappresenta una funzione determinante regolare nel semipiano $R(u) > 0$, come si vede subito, in forza della convergenza di (2), per mezzo di una dimostrazione perfettamente simile a quella data al n. 1 della Nota precedente; pertanto la (4), che si può scrivere

$$f(x) = \int_0^\infty e^{ux}\,\varphi(u)\,du\,, \tag{4'}$$

mostra che $f(x)$ è alla sua volta una funzione determinante, che la (4) rappresenta regolare nel semipiano $R(x) < 0$. Abbiamo così ottenuto che « una « funzione semplice è funzione determinante di una funzione determinante ».

3. La reciproca di questa proposizione è immediata. Sia infatti data su t la funzione $\sigma(t)$, tale che l'integrale (2) sia convergente; ne segue che la funzione determinante

$$\varphi(u) = \int_1^\infty \sigma(t)\,e^{-tu}\,dt \tag{5}$$

è regolare nel semipiano $R(u) > 0$ e tende a zero per u tendente all'infinito lungo le direzioni comprese fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (estremi esclusi). Si formi ora la determinante di questa determinante

$$f(x) = \int_0^\infty e^{ux}\,\varphi(u)\,du\,, \tag{6}$$

che l'integrale stesso rappresenta regolare nel semipiano $R(x) < 0$; sostituendo nell'espressione (5) di $\varphi(u)$ e tenendo conto della (3) poichè la condizione $R(x) < R(t)$ è soddisfatta, viene, invertendo le integrazioni:

$$f(x) = \int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t-x};$$

la $f(x)$ viene dunque ad essere una funzione semplice.

È da notare che nella (6) l'integrazione si sarebbe potuto fare, invece che lungo il semiasse reale positivo, lungo una semiretta arbitraria uscente da 0 e di azimut α, $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$: si sarebbe avuta allora per $f(x)$ un'espressione valida nel semipiano contenente il semiasse reale negativo e limitato dalla retta, passante per l'origine, perpendicolare al raggio di azimut $-\alpha$.

4. Si cerchi il comportamento asintotico di (1) quando x tende all'infinito secondo una direzione di azimut differente da zero. All'uopo, si conducano a partire dal punto 1 due semirette a, a' di azimut $\pm\alpha$, essendo α un angolo arbitrariamente piccolo; si tolga dal piano x l'angolo di ampiezza 2α formato da queste semirette e si dica X la parte del piano che rimane. In tutto X, sappiamo (Nota preced., n. 2) che la

$$f(x, u) = \int_1^u \frac{\sigma(t)\,dt}{t-x}$$

tende uniformemente ad $f(x)$; pertanto, preso ε positivo arbitrariamente piccolo, si può determinare $\bar{u}$ tale che per $u > \bar{u}$ sia, qualunque sia x in X,

$$|f(x) - f(x, u)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fissato $u > \bar{u}$, la $f(x, u)$ essendo funzione analitica regolare per $|x| > u$ e nulla all'infinito, si può prendere r positivo tale che per $|x| > r$ sia

$$|f(x, u)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

ne segue $|f(x)| < \varepsilon$ per $|x| > r$ in X, e quindi, per x tendente all'infinito per qualsiasi direzione di azimut non nullo, $f(x)$ tende a zero, ed escluso l'azimut nullo mediante l'angolo 2α, piccolo a piacere, delle semirette a, a', vi tende uniformemente.

5. Dal centro 1 con raggio R si descriva un arco di cerchio, di ampiezza $2(\pi - \alpha)$, che dalla semiretta a vada alla semiretta a', e si consideri l'area compresa fra codesto arco ed i due segmenti, fra 1 ed $1 + Re^{\alpha i}$ e fra 1 ed $1 + Re^{-i\alpha}$, che esso stacca su a, a' rispettivamente; si indichi con (c) il contorno di questa area, percorso nel senso positivo. Entro questa area, che è contenuta in X, la $f(x)$ è regolare e ad un valore, e si ha pertanto, per x interno all'area stessa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f(t)\,dt}{t - x};$$

ma, in forza del n. 4, la parte dell'integrale estesa all'arco di cerchio tende a zero per $R \to \infty$; rimane quindi, passando al limite per $R \to \infty$,

$$2\pi i\, f(x) = \int_1^{1+\infty e^{i\alpha}} \frac{f(t)\,dt}{t - x} - \int_1^{1+\infty e^{-i\alpha}} \frac{f(t)\,dt}{t - x}.$$

Sostituendo la (3), nell'ipotesi $R(x) < 1$, viene

$$(7) \qquad 2\pi i\, f(x) = \int_0^\infty e^{ux} \left(\int_1^{1+\infty e^{i\alpha}} f(t)\, e^{-ut}\, dt - \int_1^{1+\infty e^{-i\alpha}} f(t)\, e^{-ut}\, dt \right) du\,;$$

ma poichè la differenza degli integrali sotto il segno nel secondo membro è, al pari della $\varphi(u)$ data dalla (5), funzione continua (anzi analitica) di u, così, per un noto teorema di Lerch [1], le due funzioni generatrici in (6) e (7) devono coincidere, e quindi per ogni α fra 0 e $\pi/2$,

$$(8) \qquad 2\pi i \int_1^\infty e^{-ut}\, \sigma(t)\, dt =$$

$$= e^{-u} \int_0^\infty \left(e^{i\alpha} f(1 + re^{i\alpha})\, e^{-ure^{i\alpha}} - e^{-i\alpha} f(1 + re^{-i\alpha})\, e^{-ure^{-i\alpha}} \right) dr\,,$$

estensione della proposizione del n. 5 della precedente Nota.

6. La relazione di dipendenza (1) fra la funzione trascendente semplice $f(x)$ ed il suo salto $2\pi i\, \sigma(t)$ appartiene a quelle trasformazioni funzionali, ripetutamente sfruttate nella teoria delle equazioni differenziali lineari, e dette trasformazioni di Euler e di Heine [2]. La proprietà notevole della (1) è quella di conservare, sotto condizioni assai larghe per la $\sigma(t)$ e all'infuori di un termine razionale addittivo, la moltiplicazione per la variabile e la derivazione, nel senso che se $f(x)$ è la trasformata di $\sigma(t)$, $xf(x)$ lo è di $t\sigma(t)$ e $\frac{df(x)}{dx}$ di $\frac{d\sigma(t)}{dt}$, all'infuori di termini addittivi razionali: ogni operazione differenziale lineare applicata ad $\sigma(t)$ viene dunque a rispecchiarsi su $f(x)$, onde a questa trasformazione potrebbe venire dato il nome di *quasi-identità* al punto di vista algoritmico: e così la trasformazione di Laplace-Abel, che applicata per due volte consecutive conduce (n.i 2, 3) alla q u a s i i d e n t i t à, trova confermato il suo carattere *quasi-involutorio*, già notato molti anni or sono da U. Amaldi [3].

(1) Vedi i miei *Elementi della teoria delle funzioni analitiche*, pp. 334-336.

(2) Ibid., pag. 348.

(3) Questi Rendiconti, serie 5ª, vol. VII, pag. 117 (1898).