ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI.

Matematica. — *Invarianza del genere* P_a *di una varietà algebrica a quattro dimensioni.* Nota di GIACOMO ALBANESE, presentata dal Socio G CASTELNUOVO [1].

1. Per dimostrare l'invarianza di P_a [2], premettiamo alcune considerazioni sopra una varietà a tre dimensioni.

Il Severi ha dimostrato (l. c. n. 20 e 21) che « sopra una varietà a tre dimensioni W il sistema $|F+\Gamma|$ aggiunto ad una superficie F irriducibile e variabile in un sistema continuo almeno ∞^2, a curva caratteristica irriducibile, ha una sovrabbondanza σ'_f positiva o nulla ».

Indichiamo con G una superficie irriducibile di W e supponiamo che F stacchi su G una curva (FG) variabile in un sistema continuo infinito che non sia un fascio irrazionale. Il sistema $|A|$ aggiunto (sopra G) alla curva (FG) è allora regolare [3].

Chiamiamo σ'_{f+g} la sovrabbondanza del sistema $|F+G+\Gamma|$, aggiunto ad $F+G$ e con d_1 la deficienza del sistema $|A|$ che $|F+G+\Gamma|$ stacca su G. Applicando la (9) al sistema $|M|=|F+G+\Gamma|$ e alla superficie $N=G$, per la regolarità di $|A|$ si avrà;

$$\sigma'_{f+g}=\sigma'_f-d_1\,. \tag{10}$$

Analogamente detta H un'altra superficie irriducibile di W, dove F stacca una curva (FH), variabile in un sistema continuo infinito che non sia un fascio irrazionale [4], con analogo significato dei simboli si avrà:

$$\sigma'_{f+g+h}=\sigma'_{f+g}-d_2 \tag{11}$$

e dette K, ..., R, S altre superficie irriducibili di W, con le stesse ipotesi e con analoghe notazioni, si avrà:

$$\begin{aligned}\sigma'_{f+g+h+k}&=\sigma'_{f+g+h}-d_3\\ &\cdots\cdots\\ \sigma'_{f+g+h+\dots+r+s}&=\sigma'_{f+g+\dots+r}-d_r\,.\end{aligned} \tag{12}$$

[1] Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924.

[2] Cfr. la Nota pubblicata in questi Rendiconti, pag. 179.

[3] Severi, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve di una superficie algebrica*, Rendiconti R. Accad. dei Lincei, vol. XVII, 2ª serie, 1908.

[4] In queste ipotesi anche $(F+G)$ stacca su H una curva variabile in un sistema continuo infinito che non sia un fascio irrazionale ed il sistema aggiunto ad essa è regolare.

Sommando tutte queste formule si ottiene:

$$\sigma'_{f+g+h+\cdots+s} = \sigma'_f - \sum d_i\,. \tag{13}$$

A questo punto supponiamo, 1°: $\sigma'_f = 0$, 2°: che $|F + G + H + + \cdots + R + S|$ sia almeno ∞^2 e a curva caratteristica irriducibile.

Per la 2ª ipotesi e per il ricordato teorema di Severi sarà $\sigma'_{f+g+h+\cdots+s} \geq 0$. Ma allora per la 1ª ipotesi, essendo tutte le $d_i \geq 0$, per la (13) sarà:

$$\sigma'_{f+g+h+\ldots+r+s} = d_1 = d_2 = \cdots = d_s = 0$$

e di conseguenza, risalendo attraverso le (12) e la (11), fino alla (10),

$$\sigma'_{f+g+h+\ldots+r+s} = \sigma'_{f+g+h+\ldots+r} = \cdots = \sigma'_{f+g+h} = \sigma'_{f+g} = \sigma'_f = 0\,.$$

Ora si osservi che la 2ª ipotesi si può soddisfare senza porre alcuna condizione per le superficie F, G, H, $\cdots$, R, ma scegliendo opportunamente S per es., un multiplo sufficientemente alto dal sistema delle sezioni iperpiane di W. Posto allora $G + H + \cdots R = Q$ si può enunciare il teorema:

VI. — *Se sopra una varietà a tre dimensioni* W, *il sistema* $|F + \Gamma|$ *aggiunto ad una superficie* F *è regolare, e* Q *è una superficie qualunque di* W, *sulle cui parti irriducibili* F *stacca curve variabili in sistemi continui infiniti, che non siano fasci irrazionali, il sistema* $|F + Q + \Gamma|$ *aggiunto alla superficie* $F + Q$ *è regolare, e nel caso di* Q *irriducibile, stacca su* Q *stessa un sistema regolare e completo.*

Supponiamo $|F|$ almeno ∞^2 e senza superfici fondamentali. Il sistema lineare $|FG|$ che $|F|$ stacca su una qualsiasi superficie irriducibile G è allora almeno ∞^1, perchè ove si riducesse ad una sola curva o ad un gruppo di punti, le superfici di $|F|$ per un punto generico di G dovrebbero contenerla per intero e G sarebbe fondamentale per $|F|$. E perciò si ha:

VII. — *Se sopra una varietà a tre dimensioni il sistema* $|F + \Gamma|$ *aggiunto ad un sistema lineare* $|F|$, *almeno* ∞^2 *e senza superfici fondamentali, è regolare; ogni sistema* $|F + Q + \Gamma|$ *aggiunto al sistema* $|F + Q|$, *qualunque sia* Q, *è regolare.*

Indichiamo con $|G|$ un sistema lineare irriducibile infinito e a grado virtuale positivo. Il sistema $|kG|$ è allora irriducibile ed avrà un sistema aggiunto $|kG + \Gamma|$ a sovrabbondanza positiva, sicchè detta ϱ_k la sua dimensione si avrà $\varrho_k \geq [kG] + P_a - 1$.

Ora $[kG] = \binom{k}{3}[G^3] + \binom{k}{2}[G^2] + kG - \binom{k-1}{2}$ al variare di k varia con k^3, quindi al crescere di k la dimensione ϱ_k cresce come k^3.

Fissiamo sopra W un sistema lineare $|F|$ più volte infinito, irriducibile e senza superfici fondamentali e col sistema aggiunto $|F + \Gamma|$ irriducibile e regolare. Il sistema $|kG + \Gamma|$ stacca sulla generica superficie $(F + \Gamma)$ un sistema lineare la cui dimensione, al crescere di k cresce come k^2. Per un valore molto grande di $k (> k_0)$ il sistema $|kG + \Gamma|$ deve allora contenere parzialmente il sistema $|F + \Gamma|$. Poniamo:

$$|Q| = |(kG + \Gamma) - (F + \Gamma)| = |kG - F|$$

ossia

$$|kG| = |F + Q|.$$

Per le ipotesi fatte sul sistema $|F|$ e per il teorema VII anche il sistema $|kG + \Gamma|$ è regolare e si conclude:

VIII. — *Se in una varietà a tre dimensioni il sistema di superficie $|G|$ è infinito, irriducibile e a grado virtuale positivo, per k molto grande $(k > k_0)$ i sistemi $|kG + \Gamma|$, aggiunti ai sistemi $|kG|$, sono tutti regolari.*

Il Severi nella citata memoria (n. 22) dimostra che per k molto grande il sistema $|kG + \Gamma|$ è a sovrabbondanza costante; il teorema precedente dimostra che tale costante è nulla.

2. Ciò detto siano V e V′ due varietà a quattro dimensioni, immerse in certi spazi S_r, S'_r, senza punti multipli ed in corrispondenza birazionale fra di loro.

Indichiamo con P_a e P'_a i rispettivi generi aritmetici e poniamo:

$$P_a - P'_a = \alpha.$$

Si vuol dimostrare che è α uguale zero.

Indichiamo con $|E|$ e con $|F'|$ i sistemi di sezioni iperpiane di V e V′.

Chiameremo con $|E'|$ il sistema di V′ corrispondente ad $|E|$ e con $|F|$ il sistema di V corrispondente ad $|F'|$.

Per il teorema II il sistema $|\lambda E + \Gamma|$ aggiunto ad $|\lambda E|$ per λ sufficientemente alto $(> \lambda_0)$ è regolare ed avrà la dimensione:

$$\varrho_\lambda = [\lambda E] + P_a - 1.$$

Ora i due numeri ϱ_λ e $[\lambda E]$ sono invarianti, quindi sopra V′ il sistema corrispondente aggiunto al sistema $|\lambda E'|$ è di dimensione:

$$\varrho_\lambda = [\lambda E] + P'_a - 1 + \alpha$$

cioè: per $\lambda > \lambda_0$, $|\lambda E' + \Gamma|$ è a sovrabbondanza costante α.

Analogamente, sopra V′, per μ maggiore di un certo numero μ_0, il sistema $|\mu F' + \Gamma'|$ aggiunto al sistema $|\mu F'|$ è regolare e di dimensione

$$\varrho'_\mu = [\mu F'] + P'_a - 1$$

e perciò, su V, il corrispondente sistema $|\mu F + \Gamma|$ è di dimensione:

$$\varrho'_{\mu} = [\mu F] + P_a - 1 - \alpha ,$$

cioè: per $\mu > \mu_0$, $|\mu F + \Gamma|$ è a sovrabbondanza costante $-\alpha$.

Per dimostrare che è $\alpha = 0$, basterà dimostrare che sopra V la sovrabbondanza del sistema $|\mu F + \Gamma|$, e sopra V' la sovrabbondanza del sistema $|\lambda E' + \Gamma'|$, sono entrambe nulle o negative. Dovendo essere $\alpha \leq 0$ e $-\alpha \leq 0$ sarà $\alpha = 0$ e $P_a = P'_a$.

3. A tal uopo consideriamo sopra V i sistemi $|\lambda E + \mu F + \Gamma| = |G_{\lambda\mu}|$ e indichiamo con $\sigma'_{\lambda\mu}$ la corrispondente sovrabbondanza.

Dette $s_{\lambda\mu}$ e $d_{\lambda\mu}$ la sovrabbondanza e la deficienza del sistema che $|G_{\lambda\mu}|$ stacca sopra F, per la (9) si ha:

$$\sigma'_{\lambda\mu} = \sigma'_{\lambda\mu-1} + s_{\lambda\mu} - d_{\lambda\mu} .$$

Facciamo $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$ e sommiamo, si avrà:

$$\sigma'_{\lambda\nu} = \sigma'_{\lambda 0} + \sum_1^{\nu}{}_{\mu}\, s_{\lambda\mu} - \sum_1^{\nu}{}_{\mu}\, d_{\lambda\mu} . \tag{14}$$

Ora $\sigma'_{\lambda 0}$, sovrabbondanza del sistema $|\lambda E + \Gamma|$ per λ sufficientemente alto e per il teorema I è nulla.

In quanto poi ad $s_{\lambda\mu}$, sovrabbondanza sopra F del sistema $|\lambda EF + \mu F^2 + \Gamma F|$ aggiunto al sistema $|\lambda EF + (\mu - 1) F^2|$ per λ molto alto e μ qualsiasi è pure nulla. Difatti essendo F una varietà a tre dimensioni il sistema aggiunto al sistema $|\lambda EF|$ per λ maggiore di un certo λ_0, in virtù del teorema VIII è regolare, e allora per il teorema VII il sistema aggiunto al sistema $|\lambda EF + (\mu - 1) F^2|$ è regolare qualunque sia μ.

Concludiamo che nella (14) per $\lambda > \lambda_0$ son nulli tutte le $s_{\lambda\mu}$ e $\sigma'_{\lambda 0}$ e perciò:

$$\sigma'_{\lambda\nu} = - \sum_1^{\nu}{}_{\mu}\, d_{\lambda\mu} \leq 0 \tag{15}$$

per $\lambda > \lambda_0$ e ν qualsiasi.

Fissiamo un valore di $\lambda > \lambda_0$ e consideriamo il sistema $|H|$ che $|G_{\lambda\nu}|$ stacca sulla generica (λE):

$$|H| = |(\lambda E)^2 + \nu F(\lambda E) + \Gamma(\lambda E)| .$$

Tale sistema sopra (λE) è aggiunto al sistema $|\nu F(\lambda E)|$ e per ν molto grande è regolare in virtù del teorema VIII.

Dico che $|H|$ è anche completo. Difatti consideriamo sopra V' il corrispondente sistema $|H'|$ staccato sulla generica $(\lambda E')$ dal sistema $|G'_{\lambda\nu}| =$

$= |\lambda E' + \nu F' + \Gamma'|$. Essendo V' priva di punti multipli, per ν molto grande il sistema $|G'_{\lambda\nu}|$ è regolare e completo in virtù del teorema V; e stacca sopra $(\lambda E')$ un sistema $|H'|$ regolare per il teorema VIII.

D'altra parte il sistema residuo $|G'_{\lambda\nu} - (\lambda E')| = |\nu F' + \Gamma'|$ per il teorema II, se ν è molto grande, è pur esso regolare, ma allora applicando il teorema IV, si ricava che $|H'|$ è completo.

Nel passaggio da V' a V tale completezza rimane invariata quindi per ν maggiore di un certo numero ν_0 sufficientemente alto, $|H|$ è completo. Ma se il sistema completo $|G_{\lambda\nu}|$, stacca su $|\lambda E|$ un sistema $|H|$ regolare e completo per la (9), la sovrabbondanza $\sigma'_{\lambda\nu}$ di $|G_{\lambda\nu}|$ è uguale alla sovrabbondanza $\sigma'_{0\nu}$ del sistema residuo $|G_{\lambda\nu} - \lambda E| = |\nu F + \Gamma|$, cioè $\sigma'_{\lambda\nu} = \sigma'_{0\nu}$ per $\lambda > \lambda_0$ e $\nu > \nu_0$. Ora $\sigma'_{\lambda\nu}$ è proprio $-\alpha$, quindi per la (15) è $-\alpha \leq 0$.

Ragionando analogamente sopra V' si trova che è $\alpha \leq 0$ e perciò è $\alpha = 0$ e $P_a = P'_a$. C. V. D.

4. In tutto quello che abbiamo detto è essenziale che V e V' siano prive di singolarità. Per completare le nostre considerazioni, sia W una varietà a quattro dimensioni dotata di singolarità arbitrarie e V e V' due varietà senza punti multipli, in corrispondenza birazionale con W e quindi fra di loro.

Per il teorema dimostrato V e V' hanno lo stesso genere aritmetico, cioè $p_4 = p'_4 = P_a = P'_a$. È lecito perciò chiamare genere aritmetico effettivo di W questo numero P_a. Con tale definizione due varietà W e W' comunque dotate di singolarità ed in corrispondenza birazionale fra di loro hanno lo stesso genere aritmetico, il genere aritmetico cioè di una varietà V senza punti doppi, in corrispondenza birazionale con esse.

Nulla potrebbe però dirsi, per una *eventuale* varietà W che non potesse trasformarsi birazionalmente in un'altra priva di punti multipli. Limitazione che per ora rimane in questi studi. D'altronde per una tale varietà (eventuale) allo stato attuale della scienza, manca anche la definizione di genere aritmetico effettivo e tutto è da costruire.