ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Matematica. — *Due semplici espressioni del numero dei numeri primi compresi entro limiti assegnati.* Nota del dott. LUIGI FANTAPPIÈ, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Sono note varie espressioni del numero $N_{\alpha,\beta}$ dei numeri primi compresi entro limiti assegnati α, β; e per una completa bibliografia su questo argomento ritengo opportuno rimandare all'opera classica del Landau, *Handbuch der Lehre der Vertheilung der Primzahlen*, Teubner, 1909. Fra i lavori italiani mi limiterò a ricordare quello del prof. Levi-Civita [1], che ottiene $N_{\alpha,\beta}$ mediante l'indicatore logaritmico di una funzione $P(z)$, ricavata dalla serie di Lambert, che si annulla per $z = -n$, con n primo, e una Nota del dott. Sbrana [2], in cui $N_{1,\beta}$ è dato come limite di una certa sommatoria.

Nonostante ciò mi sembra di un certo interesse riportare due nuove espressioni che, essendo ottenute mediante trascendenti ben note e di facile trattazione, sembrano suscettibili di ulteriori sviluppi e applicazioni.

2. Vediamo intanto le proprietà più evidenti della funzione

$$F(z) = \operatorname{sen}^2 \pi z + \operatorname{sen}^2 \left(\pi \frac{\Gamma(z)+1}{z}\right) \tag{1}$$

che è senza dubbio molto meno complessa, tanto della $\zeta(s)$ di Riemann, che della $P(z)$ di Levi-Civita, o della $\Theta(z)$ di Von Koch, contenendo soltanto funzioni trigonometriche e la $\Gamma(z)$ Euleriana, le cui proprietà e relazioni, anche colle stesse funzioni trigonometriche, sono ben conosciute.

Osserviamo che, avendo la $\Gamma(z)$ dei poli per $z = 0, -1, -2, \ldots -n, \ldots$, anche *la $F(z)$ avrà delle singolarità essenziali pei valori interi negativi o nulli dell'argomento e per $z = \infty$*, punto di condensazione dei precedenti, *ma sarà uniforme e regolare per qualsiasi altro valore di z nel piano complesso.*

Essa poi, per qualsiasi valore reale di z, essendo data come somma di due quadrati reali, sarà sempre positiva, e sull'asse reale potrà annul-

[1] T. Levi-Civita, *Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo*. Rend. Acc. Lincei, 1895, 1° sem.

[2] F. Sbrana, *Sul numero dei numeri primi inferiori ad un limite assegnato*. Rend. Acc. Lincei, 1922, 2° sem.

larsi allora e allora soltanto che siano separatamente nulli i suoi due termini, quando cioè sia contemporaneamente

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen} \pi z = 0 \\ \operatorname{sen}\left(\pi \dfrac{\Gamma(z)+1}{z}\right) = 0 \end{cases}$$

Perchè sia soddisfatta la 1ª equazione, dovrà intanto z essere uguale a un numero intero n, certamente positivo [altrimenti la $F(z)$ avrebbe in n unà singolarità essenziale e non una radice]; perchè poi sia soddisfatta anche la 2ª equazione, occorrerà evidentemente che sia intero anche il numero

$$\text{(3)} \qquad q(z) = \frac{\Gamma(z)+1}{z} = \frac{(n-1)!+1}{n}.$$

Ma il ben noto teorema di Wilson (¹) dice che questa espressione sarà eguale a un numero intero (per n intero) *allora e allora soltanto che n è un numero primo.* Quindi in conclusione abbiamo che:

La funzione $F(z)$, *definita dalla* (1), *gode della proprietà fondamentale di annullarsi sull'asse reale per quei soli valori di z eguali a un numero intero primo* (o all'unità).

3. È questa la proprietà fondamentale della $F(z)$ che applicheremo per le ricerche successive. E infatti, dato che $F(z)$ è regolare in tutto il semipiano $R(z) \geq \varepsilon > 0$, e quindi anche nei punti $z = n$, con n intero positivo, potremo chiudere questi punti $z = n$ con tanti cerchietti C_n di raggio $r_n > 0$ abbastanza piccolo perchè in essi la $F(z)$ non si annulli mai, eccettuato, al più, il solo centro $z = n$; se infatti non fosse possibile determinare questo raggio r_n, significherebbe che $z = n$ sarebbe un punto di concentrazione per le radici di $F(z)$ e quindi sarebbe una singolarità essenziale per $F(z)$ stessa, contrariamente a ciò che abbiamo visto. Osserviamo poi che le radici di $F(z)$ date da $z = p$, con p intero primo, sono tutte radici doppie; infatti, oltre $F(p) = 0$, è anche

$$F'(z) = \pi \operatorname{sen} 2\pi z + \pi \operatorname{sen}[2\pi q(z)] \cdot q'(z)$$

e quindi $F'(p) = 0$, mentre invece è

$$F''(z) = 2\pi^2 \cos 2\pi z + 2\pi^2 \cos[2\pi q(z)] \cdot q'(z)^2 + \pi \operatorname{sen}[2\pi q(z)] \cdot q''(z)$$

e perciò

$$F''(p) = 2\pi^2 + 2\pi^2 q'(p)^2 \neq 0$$

dove $q(z)$ è definita dalla (3).

Segue di qui che l'indicatore logaritmico di Cauchy

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz$$

(¹) Dimostrato da Eulero. Per una dimostrazione cfr. ad es.: Dirichlet, *Lezioni sulla teoria dei numeri.* Trad. del Faifofer. Venezia, Tipografia Emiliana, 1881.

sarà eguale a 2 (molteplicità della radice) se n è un numero primo, a 0 se n non è primo e non è quindi radice della $F(z)$.

Avremo dunque che *il numero* $N_{\alpha,\beta}$ *dei numeri primi compresi tra* α *e* β *sarà evidentemente*

$$(4) \qquad N_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}^{\beta}{}_{n}\, I_n = \sum_{\alpha}^{\beta}{}_{n}\, \frac{1}{4\pi i}\int_{c_n} \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz$$

ove la $F(z)$ è la solita funzione definita dalla (1).

4. Questa è la prima espressione di $N_{\alpha,\beta}$, ottenuta mediante l'indicatore logaritmico di Cauchy, e seguendo lo stesso metodo del prof. Levi-Civita. Servendosi però sempre di questa funzione $F(z)$ vediamo ora come possiamo ricavare un'altra espressione, forse ancora più semplice, di $N_{\alpha,\beta}$ senza ricorrere ad integrazioni. Osserviamo perciò che l'espressione

$$(5) \qquad G(z) = \frac{\operatorname{sen}^2 \pi z}{F(z)} = \frac{1}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2[\pi q(z)]}{\operatorname{sen}^2 \pi z}}$$

rappresenta una funzione di z che si annulla per z uguale a un intero n non primo, mentre per z uguale a un numero primo p assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. È però evidente che la funzione stessa è definita anche per $z = p$, poichè infatti è

$$\lim_{z=p} G(z) = \frac{1}{1 + \left[\lim\limits_{z=p} \dfrac{\operatorname{sen}[\pi q(z)]}{\operatorname{sen} \pi z}\right]^2}$$

ed essendo

$$\lim_{z=p} \frac{\operatorname{sen}[\pi q(z)]}{\operatorname{sen} \pi z} = \lim_{z=p} \frac{\pi \cos[\pi q(z)] \cdot q'(z)}{\pi \cos \pi z} = q'(p)$$

sarà

$$\lim_{z=p} G(z) = \frac{1}{1 + q'(p)^2}.$$

Dunque $G(z)$ risulta una funzione con singolarità essenziali negli stessi punti di $F(z)$ e con poli, eventualmente, in quei punti in cui si annulla $F(z)$, ma non $\operatorname{sen}^2 \pi z$ e cioè nelle eventuali radici possedute da $F(z)$ *fuori dell'asse reale*, mentre invece sulla parte positiva di questo, e più precisamente pei valori interi, prende il valore 0 per z uguale a un intero non primo, e il valore

$$\frac{1}{1 + q'(p)^2}$$

per z uguale a un intero primo p. Se allora costruiamo la nuova funzione

$$(6) \qquad H(z) = G(z) \cdot [1 + q'(z)^2] = \frac{1 + q'(z)^2}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2[\pi q(z)]}{\operatorname{sen}^2 \pi z}}$$

questa sarà certo regolare dove è regolare la $G(s)$, e quindi, in particolare, lungo tutto il semiasse reale $n > \varepsilon > 0$; e pei valori interi n dell'argomento assumerà evidentemente il valore 1 o 0 secondochè n è primo o no. Ma allora *il numero* $N_{\alpha,\beta}$ *dei numeri primi compresi tra* α e β *sarà dato semplicemente da*

$$(7) \qquad N_{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha}^{\beta}{}_{n}\, H(n)$$

ove $H(s)$ è definita dalla (6), e la $q(s)$, che vi compare, dalla (3).

In questa espressione del numero $N_{\alpha,\beta}$, costruita mediante la funzione $H(s)$ (somigliante alla Θ di Von Koch, ma molto più semplice) compaiono soltanto la funzione sen s e la $\Gamma(s)$ Euleriana colla sua derivata; è infatti

$$q'(s) = \frac{s\Gamma'(s) - \Gamma(s) - 1}{s^2}.$$

Matematica. — *Sui complessi algebrici di rette di* S_n. Nota di BENIAMINO SEGRE, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

1. Sia Ω un *complesso* (od insieme ∞^{2n-3}) *algebrico di rette di* S_n, generale, di ordine m.

Un fascio di rette generico dello S_n contiene m rette di Ω. Un fascio siffatto si dirà *tangente* ad Ω in una sua retta, se questa sta nel fascio considerato, ed assorbe *due* (almeno) delle m rette del complesso che a quello appartengono. Uno spazio $S_{n'}$ subordinato generico di S_n contiene $\infty^{2n'-3}$ rette di Ω, costituenti in quello un complesso algebrico di rette, ancora d'ordine m, che si dirà *sezione* di Ω collo $S_{n'}$ considerato. Per un punto R generico di S_n escono ∞^{n-2} rette di Ω, costituenti un R–cono algebrico di ordine m, il quale si dirà il cono del complesso *relativo* al punto R considerato.

Se r è una retta generica di S_n, i coni del complesso relativi ai varî punti R di r, costituiscono un sistema Σ irriducibile ∞^1, algebrico, anzi razionale, *d'indice* m, di forme F^m di S_n aventi un punto R m-plo variabile. Il sistema lineare di appartenenza di Σ [2] è di dimensione non superiore ad m; anzi, se r non sta su ogni F^m di Σ, e cioè r non è retta del dato complesso Ω, quella dimensione deve proprio valere m [cfr. op. cit.

[1] Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

[2] Ved. il n. 6 della mia Nota: *Dei sistemi lineari tangenti ad un qualunque sistema di forme* (questi Rendiconti, fascicolo prec.).