ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

questa sarà certo regolare dove è regolare la G(s), e quindi, in particolare, lungo tutto il semiasse reale $n > \varepsilon > 0$; e pei valori interi n dell'argomento assumerà evidentemente il valore 1 o 0 secondochè n è primo o no. Ma allora *il numero* $N_{\alpha,\beta}$ *dei numeri primi compresi tra* α e β *sarà dato semplicemente da*

$$N_{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha}^{\beta}{}_n \, H(n) \tag{7}$$

ove H(s) è definita dalla (6), e la $q(s)$, che vi compare, dalla (3).

In questa espressione del numero $N_{\alpha,\beta}$, costruita mediante la funzione H(s) (somigliante alla Θ di Von Koch, ma molto più semplice) compaiono soltanto la funzione sen s e la $\Gamma(s)$ Euleriana colla sua derivata; è infatti

$$q'(s) = \frac{s\Gamma'(s) - \Gamma(s) - 1}{s^2}.$$

Matematica. — *Sui complessi algebrici di rette di* S_n. Nota di BENIAMINO SEGRE, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

1. Sia Ω un *complesso* (od insieme ∞^{2n-3}) *algebrico di rette di* S_n, generale, di ordine m.

Un fascio di rette generico dello S_n contiene m rette di Ω. Un fascio siffatto si dirà *tangente* ad Ω in una sua retta, se questa sta nel fascio considerato, ed assorbe *due* (almeno) delle m rette del complesso che a quello appartengono. Uno spazio $S_{n'}$ subordinato generico di S_n contiene $\infty^{2n'-3}$ rette di Ω, costituenti in quello un complesso algebrico di rette, ancora d'ordine m, che si dirà *sezione* di Ω collo $S_{n'}$ considerato Per un punto R generico di S_n escono ∞^{n-2} rette di Ω, costituenti un R-cono algebrico di ordine m, il quale si dirà il cono del complesso *relativo* al punto R considerato.

Se r è una retta generica di S_n, i coni del complesso relativi ai varî punti R di r, costituiscono un sistema Σ irriducibile ∞^1, algebrico, anzi razionale, *d'indice* m, di forme F^m di S_n aventi un punto R m-plo variabile. Il sistema lineare di appartenenza di Σ [2] è di dimensione non superiore ad m; anzi, se r non sta su ogni F^m di Σ, e cioè r non è retta del dato complesso Ω, quella dimensione deve proprio valere m [cfr. op. cit.

[1] Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

[2] Ved. il n. 6 della mia Nota: *Dei sistemi lineari tangenti ad un qualunque sistema di forme* (questi Rendiconti, fascicolo prec.).

in ([2]), n. 6 *d*)]. Pertanto se r è una retta generica di S_n, il sistema Σ ad essa relativo appartiene ad un sistema lineare ∞^m di F^m dello S_n, onde esso non contiene nessuna forma singolare pel sistema stesso [ved. op. cit. a pag. 218 in ([2]), n. 1].

Se la retta r appartiene al complesso, le F^m del sistema Σ costruito come s'è detto passano tutte per la retta stessa; se tutte vi passano con molteplicità $k > 1$ ([1]), la r si dirà *retta k-pla* del complesso. In tal caso uno spazio per r sega Ω secondo un complesso di rette avente ancora r per retta k-pla (almeno); in particolare le curve del complesso situate in piani per r hanno questa retta come tangente k-pla; ed essa assorbe k (almeno) delle m rette del complesso che stanno in un qualunque fascio di rette che la contenga; e viceversa.

2. I coni del complesso (relativi ai varî punti di S_n) sono ∞^n. Uno generico di questi sarà privo di generatrici multiple: ∞^{n-1} di tali coni avranno una retta doppia, onde saranno ∞^{n-1} (al più) le rette di Ω doppie per coni del complesso. Ne segue che una retta r di Ω è generalmente semplice per *tutti* i coni del complesso relativi ai varî suoi punti.

Sia r una retta generica di Ω. Consideriamo gli ∞^1 iperpiani, passanti per r, che toccano lungo questa retta i coni del complesso relativi ai varî suoi punti: dico che essi *variano in un fascio*. Infatti un piano π generico passante per r contiene una curva del complesso di cui r è tangente semplice, e di cui sia R il relativo punto di contatto. Il piano π sta in uno ed un solo di quegli iperpiani, che è quello che tocca lungo r il cono del complesso relativo ad R. E ciò dimostra l'asserto. Risulta di più che uno generico di quegli iperpiani non può toccare due diversi di quei coni; pertanto:

Fra i punti di r e gli iperpiani (formanti fascio) tangenti lungo r ai coni del complesso relativi ai vari punti di questa retta, intercede una corrispondenza p r o i e t t i v a, se si dicono omologhi un punto ed un iperpiano quando questo tocca lungo r il cono del complesso relativo al primo.

Si può anche dire: *Una retta r generica di Ω è contenuta in ∞^{n-1} fasci di rette, di cui solo ∞^{n-2} toccano in essa il dato complesso; quelli fra questi ultimi che hanno per centro un dato punto di r, riempiono un iperpiano variante in un fascio: fra il punto di r e l'iperpiano relativo intercede una corrispondenza p r o i e t t i v a.*

3. Per ogni retta r generica del dato complesso si ha dunque uno S_{n-2}, che la contiene, base del suddetto fascio di iperpiani. Tale S_{n-2} è il *luogo* dei piani per r, la cui curva del complesso ha questa retta come tangente doppia (almeno); esso pertanto sega Ω secondo un complesso che ha *doppia* la retta r; ed è il solo S_{n-2} per r che goda di tale proprietà.

([1]) Per il che basta che ciò capiti per k di quelle forme.

Si hanno così ∞^{2n-3} S_{n-2} di S_n, costituenti un complesso Θ algebrico di S_{n-2}, proiettivamente legato ad Ω (¹).

Due complessi come Ω e Θ si diranno fra loro *associati*.

4. Fra le rette di Ω ve ne sono di quelle per cui la corrispondenza proiettiva considerata al n. 2 degenera. Sia r una di queste rette, semplice per il complesso: essa si dirà retta *singolare* di questo. Ad r apparterranno — elementi fondamentali della suddetta corrispondenza — un punto R ed un iperpiano $\mathfrak{R}$, che si diranno rispettivamente punto ed iperpiano *singolari* del dato complesso. Saranno tangenti ad Ω lungo r tutti i fasci di rette contenenti r, ed il cui centro è R, oppure il cui piano sta in $\mathfrak{R}$. Ciò significa che il cono del complesso relativo ad R ha doppia la retta r; e che il complesso di rette sezione di Ω con $\mathfrak{R}$ ha doppia la retta r.

Inversamente sia r una retta semplice di Ω, che sia doppia per il cono del complesso relativo ad un suo punto R. Tutti i fasci di rette col centro in R e che contengono r, toccano Ω in questa retta; di più se $\mathfrak{R}$ è l'iperpiano tangente lungo r al cono del complesso relativo ad un punto di r distinto da R, tutte le curve del complesso che stanno in piani di $\mathfrak{R}$ passanti per r hanno questa retta come tangente doppia: pertanto $\mathfrak{R}$ sega Ω secondo un complesso di rette di cui r è retta doppia; ed inoltre Ω è toccato in r da ogni fascio di rette dello S_n contenente questa retta, ed il cui piano stia in $\mathfrak{R}$.

Se invece è dato un iperpiano $\mathfrak{R}$ che seghi Ω secondo un complesso di rette avente una retta doppia r, consideriamo un piano π per r non situato in $\mathfrak{R}$, e sia R il punto di contatto di r colla curva del complesso situata in quel piano. Il cono del complesso relativo ad R passa doppiamente per r, poichè lungo questa retta è toccato da $\mathfrak{R}$ e π. Di più i fasci di rette tangenti ad Ω in r sono distribuiti come s'è detto sopra.

Si è già detto che sono generalmente ∞^{n-1} i coni del complesso con retta doppia. Pertanto:

I punti, gli iperpiani e le rette singolari del complesso sono ∞^{n-1}.

Sono punti singolari quelli per cui il cono del complesso acquista una retta doppia.

Sono iperpiani singolari quelli che segano Ω secondo un complesso con retta doppia. Da qui segue che:

Un complesso di rette generale non ha retta doppia: per un complesso di rette l'avere una retta doppia è condizione semplice.

Sono rette singolari le rette del complesso doppie per coni del medesimo, o doppie per complessi sezioni iperpiane di quello; e ognuno di questi due fatti porta di conseguenza l'altro.

(¹) Ω e Θ coincidono in un unico complesso di rette per $n = 3$

Data una retta r singolare di Ω, i coni del complesso col vertice su di essa, hanno lungo r un medesimo iperpiano tangente, che è l'iperpiano singolare relativo ad r: tranne per un cono che ha r doppia, ed il cui vertice è il punto singolare di r; inoltre le curve del complesso situate nei vari piani per r, la toccano in un punto fisso, che è il detto punto singolare: tranne per ∞^{n-3} di quelle curve, che l'hanno per bitangente, ed i cui piani riempiono un iperpiano, il quale è l'iperpiano singolare di r.

5. In base al numero precedente si hanno a considerare due varietà, l'una luogo dei punti singolari di Ω, l'altra inviluppo degli iperpiani singolari di Ω. Ebbene:

Dato un complesso algebrico generico di rette dello S_n, le due varietà luogo dei punti singolari, ed inviluppo degli iperpiani singolari del complesso, costituiscono un'unica ipersuperficie, che si dirà l'ipersuperficie singolare del complesso: precisamente questa è toccata in un punto singolare dall'iperpiano singolare ad esso relativo.

Sia P un punto singolare generico di Ω: il cono Π del complesso ad esso relativo avrà una retta doppia p, senza avere altre particolarità. Tracciamo una retta r generica per P: si tratta di vedere quando essa tocca in P l'ipersuperficie luogo dei punti singolari di Ω.

Costruiamo il sistema Σ relativo ad r, come si è detto al n. 1: questo sistema avrà un certo numero di coni con retta doppia ([1]), in corrispondenza ai punti singolari che stanno su r. Fra quelli vi è sempre il cono Π: si tratta di vedere come va scelta r, affinchè questo assorba *due* (almeno) di quei coni con retta doppia.

Ora segando Σ con un iperpiano generico, ed applicando i teoremi dei n.i 2 *b*), 2 *c*), e 5, del lavoro citato in ([2]) a pag. 218, si vede che affinchè ciò capiti è necessario che la retta p stia sull'*inviluppo* del sistema Σ considerato.

Questo inviluppo è una ipersuperficie d'ordine $2m(m-1)$ passante per la retta r colla molteplicità $m(m-1)$; essa è ulteriormente segata dai piani per r secondo curve d'ordine $m(m-1)$ che non sono altro che le curve del complesso situate in quei piani ([2]).

Affinchè dunque la retta r presenti la particolarità richiesta, occorre che dalla curva d'ordine $m(m-1)$ inviluppata dalle rette di Ω site nel piano rp, si stacchi, debitamente contata, la retta p. Ciò implica che questa sia una bitangente di quella curva, onde (n. 4) il piano suddetto, e quindi

([1]) Tale numero non è che l'*ordine* della ipersuperficie singolare del complesso, e quindi vale: $(n-1)\,m(m-1)^{n-1}$. Cfr. C. H. Sisam, Atti Acc. Torino, *46* (1911), p. 481.

([2]) Infatti le superficie sezioni di quella con S_3 per r, non sono altro che le note *superficie del complesso* (di Plücker) relative alla retta r ed ai complessi sezioni di Ω con quegli S_3.

pure la retta r, dovrà stare nell'iperpiano singolare relativo al punto P considerato. E questo è ciò che dovevasi dimostrare.

6. Sia ϱ uno S_{n-2} di S_n che seghi Ω secondo un complesso con retta doppia r. Potranno solo presentarsi due casi, e cioè: o r è retta singolare di Ω, ed allora ϱ sta necessariamente nel suo iperpiano singolare (n. 4); oppure r non è retta singolare di Ω, ed in tal caso ϱ è lo S_{n-2} che le è associato secondo quanto si è detto al n. 3. Gli S_{n-2} del primo tipo sono solo ∞^{2n-4}, quelli del secondo sono ∞^{2n-3}, e comprendono i primi come caso particolare. Dunque:

Gli S_{n-2} *che segano* Ω *secondo un complesso di rette con retta doppia sono* ∞^{2n-3}, *e costituiscono il complesso* Θ *associato ad* Ω. *I due complessi* Θ *ed* Ω *sono riferiti birazionalmente fra di loro.*

7. Al n. 3 si è introdotto accanto al dato complesso di rette Ω, il complesso associato Θ. Con ragionamento duale si è tratti a considerare il *complesso di rette di* S_n *associato a* Θ: *ebbene questo non è che il complesso di rette di partenza,* Ω.

Sia infatti ϱ uno S_{n-2} generico di Θ, associato quindi ad una retta r generica di Ω. Consideriamo il fascio d'iperpiani di asse ϱ; in ogni iperpiano di questo fascio avremo ∞^{n-2} S_{n-2} di Θ, che invilupperanno una ipersuperficie; il punto di contatto di questa con ϱ varia descrivendo una retta: si tratta di far vedere che questa è la retta r.

L'ipersuperficie considerata entro un iperpiano per ϱ non è altro (n.i 4, 5) che l'ipersuperficie singolare del complesso sezione di Ω con quell'iperpiano. Questo complesso ha ϱ come iperpiano singolare, e la retta singolare relativa a ϱ è la r. Pertanto effettivamente (n. 5) l'ipersuperficie considerata tocca ϱ in un punto di r.

8. Senza proseguire questo studio, notiamo che esso diventa assai complicato, quando lo si voglia fare in modo completo e generale. Sarà quindi bene limitarci al caso più semplice dei *complessi quadratici di rette dello spazio a 4 dimensioni,* caso che mi propongo di studiare in un prossimo lavoro.