ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 13 aprile 1924.

V. VOLTERRA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Su una separazione di singolarità in una funzione analitica.* Nota del Socio S. PINCHERLE.

1. Come in due Note precedenti [1], considero una funzione $\sigma(t)$ della variabile reale t, data fra 1 e $+\infty$, e tale che l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t}$$

sia convergente, onde segue (I, 2), che la funzione analitica

$$f(x) = \int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t-x},$$

è regolare in tutto il piano x ad eccezione del taglio $\boldsymbol{t}$ eseguito lungo l'asse reale fra 1 e $+\infty$. Si aggiungerà l'ipotesi *che le due prime derivate di $\sigma(t)$ abbiano le stesse proprietà ammesse per la $\sigma(t)$ stessa*: questa condizione, che non sarebbe difficile di rendere meno restrittiva, permette di evitare una discussione che non ha importanza per il fatto che ci proponiamo di porre in evidenza.

Si è veduto (I, 4) che la $f(x)$ è sviluppabile, entro il cerchio $|x| < 1$, in una serie di potenze $\Sigma q_n x^n$ i cui coefficienti sono i valori, per $z = 0, 1, 2, \ldots$, della funzione determinante

$$\Phi(z) = \int_1^\infty \sigma(t)\, t^{-z-1}\, dt,$$

[1] Questi Rendiconti, seduta del 13 gennaio e del 2 marzo 1924. Esse verranno qui richiamate con I e II, seguiti dal numero del paragrafo.

e dalle proprietà della funzione determinante, in base alle ipotesi fatte su $\sigma(t)$, risulta facilmente che è

$$\lim \frac{\Phi(z+1)}{\Phi(z)} = 1 \quad \text{per} \quad z \to +\infty\,;$$

ne viene che posto

$$a_0 = \frac{1}{q_0}\,, \quad a_n = \frac{q_{n-1}}{q_n}\,,$$

segue

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n}\,, \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 1\,. \tag{1}$$

2. Si definisca ora un'operazione lineare, che verrà indicata con A, la quale per ogni potenza intera positiva della variabile x sia definita da

$$\mathrm{A}(x^n) = x^n (a_n - x)\,, \qquad (n = 0\,,1\,,2\,,\ldots)\,; \tag{2}$$

questa operazione è formalmente applicabile ad ogni serie di potenze intere positive di x, ed è anche effettivamente applicabile, in quanto il risultato dell'operazione è una serie di potenze convergente in un cerchio non minore del cerchio di convergenza della serie cui è applicata. Se $\varphi = \Sigma\, c_n\, x^n$ è convergente in un cerchio (r) [1], si avrà

$$\mathrm{A}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n c_n - c_{n-1})\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, x^n \tag{3}$$

il cui raggio di convergenza non è inferiore ad r.

Indicando con (S) l'insieme delle serie di potenze di x il cui raggio di convergenza è superiore all'unità, sia φ un elemento di S; ne viene allora che la serie $\Sigma\, h_n\, a_0\, a_1 \ldots a_{n-1}$ è convergente, e dall'essere $h_n = a_n c_n - c_{n-1}$, si riconosce che la sua somma è lo zero. Talchè

« Se φ è un elemento di S, ed è $\mathrm{A}(\varphi) = \Sigma h_n x^n$, si ha

$$h_0 + h_1 a_0 + h_2 a_0 a_1 + \cdots + h_n a_0 a_1 \ldots a_{n-1} + \cdots = 0 \text{ » } \tag{4}$$ [2].

In altri termini, l'operazione A applicata ad (S) produce elementi di (S), ma soggetti alla condizione (4): si potrebbe dire che essi appartengono ad un iperpiano (S') di (S).

[1] Con (r) si indica il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio r.

[2] Questo risultato ed altri analoghi si trovano nelle mie Note: *Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche*, Rend. della R. Accad. di Bologna, 30 gennaio 1898, e *Di un'estensione del concetto di divisibilità per un polinomio*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, 3 aprile 1898.

3. La reciproca è vera: « se cioè una serie $\psi = \Sigma h_n x^n$ di (S) sod- « disfa, coi suoi coefficienti, alla relazione (4), essa è il risultato della A « applicata ad un elemento di (S) ».

Si consideri infatti l'operazione A^{-1}, inversa di A. Si trova immediatamente che è

$$A^{-1}(1) = \frac{1}{a_0} + \frac{x}{a_0 a_1} + \frac{x^2}{a_0 a_1 a_2} + \cdots = f(x), \tag{5}$$

ed

$$A^{-1}(x^m) = \frac{x^m}{a_m} + \frac{x^{m+1}}{a_m a_{m+1}} + \frac{x^{m+2}}{a_m a_{m+1} a_{m+2}} + \cdots, \tag{5'}$$

serie convergenti nel cerchio di raggio 1. Applicando la A^{-1} all'elemento di (S) $\varphi = \Sigma c_n x^n$, si trova immediatamente

$$A^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_0 + c_1 a_0 + \cdots + c_n a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) \frac{x^n}{a_0 a_1 \ldots a_n}; \tag{6}$$

ma se si cerca il raggio di convergenza della serie nel secondo membro, si vede subito che esso è uguale ad 1, se la somma della serie

$$c_0 + c_1 a_0 + c_2 a_0 a_1 + \cdots \tag{7}$$

(convergente, come si è detto) è diversa da zero. Se invece essa è uguale a zero, dall'essere

$$c_0 + c_1 a_0 + \cdots + c_n a_0 a_1 \ldots a_{n-1} =$$
$$= - a_0 a_1 \ldots a_n (c_{n+1} + c_{n+2} a_{n+1} + c_{n+3} a_{n+1} a_{n+2} + \cdots),$$

e dal valore maggiorante dei coefficienti c_n si deduce che la serie (6) ha lo stesso raggio di convergenza della φ e quindi che $A^{-1}(\varphi)$ appartiene ad (S); la proposizione reciproca è così dimostrata.

L'operazione A^{-1}, applicata agli elementi di (S), riduce dunque in generale il loro cerchio di convergenza ed introduce cioè una singolarità posta sulla circonferenza $|x| = 1$; vi è eccezione per gli elementi di (S') e per questi soltanto: su questi, l'applicazione di A^{-1} non produce singolarità.

4. Si indichi con C la somma della serie (7); la $\varphi(x) - C$ apparterrà allora ad (S'), e sarà

$$A^{-1}(\varphi(x) - C) = A^{-1}(\varphi) - CA^{-1}(1) = A^{-1}(\varphi) - C f(x) = \psi(x)$$

un elemento di (S). Ne segue

$$A^{-1}(\varphi) = \psi(x) + C f(x), \tag{8}$$

e si vede da ciò come la singolarità introdotta da A^{-1} sia precisamente quella rappresentata da $f(x)$, all'infuori del moltiplicatore costante C.

Tutte le funzioni ottenute dall'applicazione di A^{-1} agli elementi di (S) hanno per $|x| = 1$ la medesima singolarità; se $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono due elementi di (S) e C, C′ sono le somme delle rispettive serie (7), la $C'\varphi(x) - C\psi(x)$ apparterrà ad (S′), cioè la singolarità di $C'\varphi(x)$ e quella di $C\psi(x)$ per $|x| = 1$ si distruggono.

L'operazione A può dirsi *pertinente* alla funzione $f(x)$.

5. Mutando x in x/α, le a_n si mutano in $a_n\alpha$ ed il cerchio (1) nel cerchio $(|\alpha|)$; la A è definita da

$$A(x^n) = x^n(a_n\alpha - x)$$

e la A^{-1} introduce un termine $cf(x)$ avente come singolarità un taglio (essenziale o no) fatto da α ad ∞ lungo il raggio di azimut arg. α.

La $f(x/\alpha)$ verrà detta *funzione semplice relativa ad* α.

Il caso volgare in cui sono $a_0 = a_1 = \cdots a_n = \cdots = 1$, dà per l'operazione A^{-1} la divisione per $x - \alpha$; la singolarità introdotta è il polo di primo ordine $x = \alpha$, e l'iperpiano (S′) è l'insieme delle serie convergenti in cerchi (r) [con $r > |\alpha|$] e divisibili per $x = \alpha$.

6. Sia data una serie di potenze $F(x) = \Sigma c_n x^n$ di cui r sia il raggio di convergenza, e si supponga verificato in qualsiasi modo che l'operazione A, pertinente ad una funzione semplice $f_1(x)$ relativa ad α [con $(\alpha) = r$] ed applicata ad F, dia come risultato una serie di potenze $G(x)$ convergente in un cerchio di raggio $r' > r$. È dunque

$$F(x) = A^{-1}(G(x)),$$

e perciò sarà applicabile la (8), cioè, indicando con $F_1(x)$ una serie di potenze avente come raggio r', si avrà

$$F(x) = F_1(x) + c_1 f_1(x).$$

La funzione analitica rappresentata da $F(x)$ entro il cerchio (r) esiste dunque fuori di questo cerchio, ha sulla circonferenza la singolarità rappresentata da $f(x)$ e lungo la porzione del taglio di $f(x)$ compreso entro la circonferenza (r'), fra il punto α e la circonferenza stessa, ha un salto dato da $c_1\sigma$, essendo σ il salto di $f(x)$.

Qualora si trovasse per $F_1(x)$ un'operazione B, pertinente ad una funzione semplice $f_2(x)$ relativa a β (con $|\beta| = r'$) ed avente analogo effetto su F_1, si avrebbe in modo analogo

$$F(x) = F_2(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x),$$

dove $F_2(x)$ è una serie di potenze convergente in un cerchio di raggio

$r'' > r'$. E così si può proseguire: qualora, coll'applicazione successiva del metodo, si giungesse ad un'espressione

$$F(x) = \sum_{1}^{m} {}_{\nu}\, c_\nu\, f_\nu(x) + F_m(x),$$

dove $F_m(x)$ risultasse funzione intera, la separazione delle funzioni semplici $f_\nu(x)$, caratteristiche delle singolarità di $F(x)$, metterebbe in evidenza il comportamento di $F(x)$ su tutta la propria stella di Mittag-Leffler.

Il metodo precedente presuppone che i punti $\alpha, \beta, \ldots$, cui sono relative le successive funzioni semplici $f_1(x), f_2(x), \ldots$, siano di moduli crescenti. Rimane da vedere come il metodo stesso vada modificato se due o più di questi punti abbiano moduli uguali. Rimane pure da dare esempî dell'applicazione di questo metodo: esempî che può fornire senza difficoltà la teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali, anche d'ordine infinito.

Idromeccanica. — *Sull'integrazione dell'equazione delle rotazioni viscose.* Nota del Corrispondente UMBERTO CISOTTI.

1. *Richiamo dell'equazione caratteristica.* — Ho denominato *rotazioni viscose* ([1]) i moti, compatibili colle equazioni indefinite di fluidi viscosi incomprimibili, nei quali la velocità di un generico punto P è definita dalla relazione vettoriale

$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{k} \wedge (P - O), \tag{1}$$

essendo O un punto fisso e **k** un vettore unitario costante che individuano un asse orientato fisso, attorno a cui ogni particella gira descrivendo una traiettoria circolare, normale all'asse, e col centro sull'asse stesso, con valore $v = \omega r$ della velocità, se r designa la distanza di P dall'asse. Se ω è indipendente da P si tratta di rotazioni rigide, altrimenti non può essere che funzione di r, oltre che del tempo t (nei moti variabili), e deve soddisfare alla seguente equazione differenziale ([2])

$$\nu r \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} + \frac{5}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(2\omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0, \tag{2}$$

ν essendo una costante che ha il significato di rapporto fra il coefficiente di viscosità e la densità della massa fluida. Introducendo la funzione

$$\Omega = 2\omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \tag{3}$$

([1]) Questi Rendiconti, vol. XXXIII, pag. 161.

([2]) Loc. cit., n. 5 (13).