ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

$r'' > r'$. E così si può proseguire: qualora, coll'applicazione successiva del metodo, si giungesse ad un'espressione

$$F(x) = \sum_1^m {}_\nu c_\nu f_\nu(x) + F_m(x),$$

dove $F_m(x)$ risultasse funzione intera, la separazione delle funzioni semplici $f_\nu(x)$, caratteristiche delle singolarità di $F(x)$, metterebbe in evidenza il comportamento di $F(x)$ su tutta la propria stella di Mittag-Leffler.

Il metodo precedente presuppone che i punti $\alpha, \beta, \ldots$, cui sono relative le successive funzioni semplici $f_1(x), f_2(x), \ldots$, siano di moduli crescenti. Rimane da vedere come il metodo stesso vada modificato se due o più di questi punti abbiano moduli uguali. Rimane pure da dare esempî dell'applicazione di questo metodo: esempî che può fornire senza difficoltà la teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali, anche d'ordine infinito.

Idromeccanica. — *Sull'integrazione dell'equazione delle rotazioni viscose.* Nota del Corrispondente UMBERTO CISOTTI.

1. *Richiamo dell'equazione caratteristica.* — Ho denominato *rotazioni viscose* (1) i moti, compatibili colle equazioni indefinite di fluidi viscosi incomprimibili, nei quali la velocità di un generico punto P è definita dalla relazione vettoriale

$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{k} \wedge (P - O), \tag{1}$$

essendo O un punto fisso e $\mathbf{k}$ un vettore unitario costante che individuano un asse orientato fisso, attorno a cui ogni particella gira descrivendo una traiettoria circolare, normale all'asse, e col centro sull'asse stesso, con valore $v = \omega r$ della velocità, se r designa la distanza di P dall'asse. Se ω è indipendente da P si tratta di rotazioni rigide, altrimenti non può essere che funzione di r, oltre che del tempo t (nei moti variabili), e deve soddisfare alla seguente equazione differenziale (2)

$$\nu r \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} + \frac{5}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(2\omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0, \tag{2}$$

ν essendo una costante che ha il significato di rapporto fra il coefficiente di viscosità e la densità della massa fluida. Introducendo la funzione

$$\Omega = 2\omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \tag{3}$$

(1) Questi Rendiconti, vol. XXXIII, pag. 161.
(2) Loc. cit., n. 5 (13).

legata al vettore $\mathbf{v}$ dalla notevole relazione [1]

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \Omega \mathbf{k} ,$$

la (2) si trasforma nella s guente equazione:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 . \tag{4}$$

Vogliamo ora occuparci dell' integrazione di queste equazioni.

Dalle (3) e (4) consegue la seguente relazione [2]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{c'(t)}{r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial t} , \tag{5}$$

dove $c'(t)$ designa la derivata rispetto a t di un'arbitraria funzione di t; essa ci sarà utile per ricavare ω, una volta determinata la funzione Ω.

2. *Moti permanenti.* — Si consideri dapprima ω e Ω indipendenti dal tempo t: la (2) diviene

$$\frac{d^3 \omega}{dr^3} + \frac{5}{r} \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{3}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = 0 ,$$

la cui soluzione generale è

$$\omega = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{r^2} + \mathrm{C} \log r , \tag{6}$$

A, B, C designando costanti arbitrarie. Conseguentemente, per la (3), si ha

$$\Omega = 2\mathrm{A} + \mathrm{C} + 2\mathrm{C} \log r , \tag{7}$$

che (per Ω indipendente da t) è integrale generale della (4).

La (6), interpretata cinematicamente, esprime che il moto risulta della composizione: di una rotazione di insieme di velocità angolare A, di un moto irrotazionale di potenziale di velocità (non uniforme) B arctg y/x, infine di un moto rotatorio di velocità angolare C log r [3].

Soluzioni finite per $r = 0$ (che interessano quando l'asse di rotazione attraversa la massa fluida) si hanno solamente assumendo $\mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$; si hanno allora le sole rotazioni rigide. È però degna di rilievo, tra le soluzioni che vanno considerate fino al valore zero di r, quella che si ottiene assumendo solamente $\mathrm{B} = 0$, perchè a malgrado per essa divenga logaritmi-

[1] Loc. cit., n. 6.

[2] Loc. cit., n. 7.

[3] Il Lamb [*Hydrodynamics*, art. 333, pag. 580] considera un caso di moto rotatorio permanente composto delle prime due rotazioni soltanto; non mi consta che la terza sia stata messa in rilievo.

camente infinita la rotazione per $r=0$, pur tuttavia il valore

$$v = r\omega = \mathrm{A}r + \mathrm{C}r \log r$$

della velocità si annulla per $r=0$.

3. *Moti variabili.* — Secondo un classico procedimento, cerchiamo soluzioni della (4) del tipo

$$\Omega = \mathrm{T}\cdot\mathrm{R}\,, \tag{8}$$

dove T designa funzione della sola t e R della sola r; indicando con punti le derivazioni, la (8) portata in (4) dà luogo alla equazione

$$\frac{\dot{\mathrm{T}}}{\mathrm{T}} = \frac{\nu}{\mathrm{R}}\left(\ddot{\mathrm{R}} + \frac{1}{r}\dot{\mathrm{R}}\right). \tag{9}$$

Essendo il primo membro indipendente da r e il secondo membro indipendente da t, indicando con h una costante reale qualsiasi, la precedente equazione si scinde nelle due seguenti:

$$\frac{\dot{\mathrm{T}}}{\mathrm{T}} = -h^2\,, \quad \ddot{\mathrm{R}} + \frac{1}{r}\dot{\mathrm{R}} + \frac{h^2}{\nu}\mathrm{R} = 0 \text{ (}^1\text{)}. \tag{10}$$

Integrando la prima si ottiene

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0\, e^{-h^2 t}\,, \tag{11}$$

con T_0 costante arbitraria. La seconda è l'equazione differenziale delle funzioni cilindriche di ordine zero, e l'integrale generale è

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_0\,\mathrm{J}_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) + \mathrm{R}'_0\,\mathrm{Y}_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right), \tag{12}$$

con R_0 e R'_0 costanti arbitrarie e J_0 e Y_0 rappresentano le funzioni cilindriche rispettivamente di Bessel e di Neumann, esprimibile quest'ultima mediante la prima nel modo seguente [2]:

$$\mathrm{Y}_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{J}_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\int \frac{dr}{r\left[\mathrm{J}_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\right]^{\frac{2h}{\sqrt{\nu}}}}. \tag{13}$$

[1] Si è volutamente messo in rilievo che il secondo membro della prima di queste equazioni è negativo; il caso opposto non ha interesse fisico inquantochè darebbe per T [cfr. la (11)] un fattore esponenziale crescente indefinitamente col tempo t.

[2] Cfr. Nielsen, *Cylinderfunktionen* [Leipzig, 1904], pag. 44.

Per le (11), (12) e (13), la (8) può scriversi

$$\Omega = e^{-h^2 t} J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) \left\{ C_1 + C_2 \int \frac{dr}{r\left[J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\right]^{\frac{2h}{\sqrt{\nu}}}} \right\} \tag{14}$$

indicando ora C_1 e C_2 costanti arbitrarie.

Dalla (5), tenendo conto della (3), si deduce la seguente espressione per ω:

$$\omega = -\frac{c(t)}{r^2} + \frac{\sqrt{\nu}}{hr} e^{-h^2 t} \times \tag{15}$$

$$\times \left\{ J_1\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) \left[C_1 + C_2 \int \frac{dr}{r\left[J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\right]^{\frac{2h}{\sqrt{\nu}}}} \right] + \frac{C_2}{r\left[J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\right]^{\frac{2h}{\sqrt{\nu}}-1}} \right\},$$

essendo $J_1 = - J_0^1$.

4. *Soluzioni finite per* $r = 0$ *e in campi limitati.* — Queste condizioni interessano il moto rotatorio di masse fluide limitate quando l'asse fisso, attorno a cui girano, attraversa le masse stesse. Bisogna assumere $C_2 = c(t) = 0$, con che la (14) e la (15) divengono rispettivamente:

$$\Omega = C_1 e^{-h^2 t} J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right), \quad \omega = \frac{C_1 \sqrt{\nu}}{hr} e^{-h^2 t} J_1\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right). \tag{16}$$

A ogni valore reale di h corrisponde una soluzione particolare, si può anzi dire a ogni valore reale e positivo, inquantochè risulta dalle precedenti espressioni di Ω e di ω che esse rimangono immutate cambiando di segno a h. Data la natura lineare e omogenea della equazione (4), alla quale deve soddisfare Ω, è pure integrale della (4):

$$\Omega = \int_0^\infty f(h)\, e^{-h^2 t} J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) dh + \Omega', \tag{17}$$

quale si sia la funzione $f(h)$, naturalmente purchè tale da assicurare la integrabilità della funzione integranda nell'intervallo indicato, e indicando Ω' l'integrale corrispondente ai moti permanenti [n. 2], che nel caso attuale (moto regolare anche per $r = 0$) si riduce a una costante.

Si può sfruttare l'arbitrarietà di $f(h)$ per determinare la soluzione corrispondente ad assegnate condizioni iniziali, in modo preciso, assegnando i valori delle velocità iniziali dei punti della massa fluida rotante.

Sia, per $t = 0$,

$$v = v_0(r), \tag{18}$$

la relazione che definisce la distribuzione delle velocità all'istante iniziale. Dalla (1) si ha, per $t = 0$,

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r}, \tag{19}$$

e, per la (3),

$$\Omega_0 = \frac{v_0}{r} + \dot{v}_0, \tag{20}$$

designando $\dot{v}_0$ la derivata di v_0. Questa formula definisce i valori iniziali di Ω, nota la distribuzione iniziale delle velocità. La questione è ora ridotta ad assegnare alla arbitraria funzione $f(h)$, che compare nella (17), una espressione tale che sia $\Omega = \Omega_0$ per $t = 0$. Basta, a tal uopo, assumere

$$f(h) = \frac{h}{\nu} \int_0^\infty [\Omega_0(r') - \Omega'] \, J_0\left(\frac{hr'}{\sqrt{\nu}}\right) r' \, dr', \tag{21}$$

con che la (17) diviene

$$\Omega(r, t) = \frac{1}{\nu} \int_0^\infty e^{-h^2 t} \, J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) h \, dh \int_0^\infty [\Omega_0(r') - \Omega'] \, J_0\left(\frac{hr'}{\sqrt{\nu}}\right) r' \, dr' + \Omega'. \tag{22}$$

Infatti, ponendo in questa $t = 0$, si ottiene

$$\Omega(r, 0) = \frac{1}{\nu} \int_0^\infty J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) h \, dh \int_0^\infty [\Omega_0(r') - \Omega'] \, J_0\left(\frac{hr'}{\sqrt{\nu}}\right) r' \, dr' + \Omega';$$

il secondo membro, per una nota identità [1], eguaglia $\Omega_0(r)$, c. v. d.

Per la (22) si può determinare ω per mezzo della (5): tenendo conto della (3), che ω deve mantenersi finita per $r = 0$ e notando che $J_0' = -J_1$, si ottiene

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot r} \int_0^\infty e^{-h^2 t} \, J_1\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) dh \int_0^\infty [\Omega_0(r') - \Omega'] \, J_0\left(\frac{hr'}{\sqrt{\nu}}\right) r' \, dr' + \frac{\Omega'}{2}. \tag{23}$$

Risulta che il comportamento assintotico, per $t = \infty$, è la rotazione rigida di velocità angolare $\frac{1}{2}\Omega'$.

[1] Cfr. Nielsen, loc. cit., pag. 363, formula (17).